

Bedn: orthogonale Systeme sind "Formel für Koeffiz." für $v \in V$ gilt: $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$ falls $(v_1, \dots, v_n)$ OVB
 lin. unabh. und eine OVB ist ein orthonormales Erzeugendensystem. $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$ falls $(v_1, \dots, v_n)$ OVB
 Kurz: $B = (v_1, \dots, v_n)$ OVB $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Δ -Ungl.: $|x+y| \leq |x|+|y|$
 Zusatz: $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$
 $\Rightarrow |a-c| \geq |a|-|c|$

Zwei Vektoren eines eukl. oder unitären VR heißen orthogonal, falls $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle = 0$
 Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt orthogonales System, falls:

- $\exists$ ein Element $0 \in V$ (Nullvektor/-vektor) s.d.
 - a) $0+v=v \quad \forall v \in V$
 - b) $\forall v \in V \exists v' \in V$ s.d. $v+v'=0$
 [wir schreiben $v'=-v$ und $v+(-v)=-v-v$]
- $v+w=w+v$ ($\hat{=}$ kommutativgesetz)
- (VZ) Es gilt für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$
 - $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \lambda(vw) = \lambda v + \lambda w$
 - $\lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v, \lambda \cdot v = v \quad (\lambda \in K)$

(i) $\forall i \in I: v_i \neq 0$ (ii) $\forall i, j: \langle v_i, v_j \rangle = 0$ und heißt ON-System, falls zusätzlich
 (iii) $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i \in I$. Seien X, Y unitäre VR.
 lin. Abb. $F: X \rightarrow Y$ heißt unitär (orthog.), falls $x, y \in X$:
 $\langle Fx, Fy \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X$

Unendlichdimensionale Vektorräume

Eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ (I eine Menge z.B. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) heißt lin. unabh., falls aus
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0, \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $i_1, \dots, i_n \in I$
 d.h. für alle endlichen Lin.kombinationen von Vektoren aus $(v_i)_{i \in I}$
 Die lin. Hülle der Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ ist definiert als die Menge aller endl. Lin.komb.,
 $\text{span}(v_i)_{i \in I} = \{ \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_n v_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, i_1, \dots, i_n \in I \}$
 Eine Basis von V ist eine Familie von lin. unabh. Vektoren, die den ganzen Raum V aufspannen, d.h. $\text{span}(v_i)_{i \in I} = V$

Satz:

Wenn Basis nicht endl. ist $\Leftrightarrow$ unendl. dim. VR

Spalten- / Zeilenraum & Spalten- / Zeilenrang

Def.: Spaltenraum einer Matrix $\hat{=}$ lin. Hülle der Spaltenvekt.

Spaltenrang = $\dim(\text{Spaltenraum})$
 $= \#$ lin. unabh. Spalten

Analog für Zeilenraum & Zeilenrang

Satz:

Spaltenrang = Zeilenrang d.h. Spaltenr. $\neq$ Zeilenraum

Lineare Abb. $K^n \rightarrow K^m$ und Matrizen

Eine Abb. $f: V \rightarrow W$ heißt linear, falls

- (i) $\forall v, w \in V: f(v+w) = f(v) + f(w)$
- (ii) $\forall v \in V, \lambda \in K: f(\lambda v) = \lambda f(v)$
 $\Rightarrow$ (i) & (ii) $\forall v, w \in V, \lambda \in K: f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$
- Notation: für $f: V \rightarrow W$ linear ist $f \in L(V, W) = \text{Hom}(V, W)$
- (i) $f \in L(V, W)$ & bijektiv $\Rightarrow$ Isomorphismus, $V \cong W$
- (ii) $f \in L(V, W)$ & $V=W \Rightarrow$ Endomorphismus
- (iii) $f \in \text{End}(V)$ & bijektiv $\Rightarrow$ Automorphismus

Satz:

Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:

(a) $f(0) = 0$

Orthogonale Matrizen

O orthog. (Rotation, Spiegel.)

$\Leftrightarrow O^T O = O O^T = I \Leftrightarrow O^T = O^{-1} \Leftrightarrow \langle O v, O w \rangle = \langle v, w \rangle$
 $\Rightarrow$ alle EW haben Betrag 1 $\Rightarrow \det(O) = \pm 1$ (folgt mit $\prod \lambda_i$)
 $\Leftrightarrow$ Zeilen / Spalten sind OVB.

• Orthogonal $\Leftrightarrow 0$ diag'bar und $|EW|=1$
 (z.B. $\mathbb{Z}, 0$ orthog. no berechnete EW und vergleiche geom./als Vielfachheiten)

LINEARE ALGEBRA

Injektivität & Surjektivität von Abb.

Def.: (Injektiv)
 Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt injektiv, falls aus

$x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) folgt, dass auch $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Versch. Elemente aus X werden auf versch. Bilder in Y abgebildet.)
 $\rightarrow$ Die Urbilder von injektiven Fakten sind eindeutig.

Def.: (Surjektiv)
 Eine Abb. heißt surjektiv, falls für

alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, s.d. $f(x)=y$.
 (Jedes Element aus Y wird von f "getroffen")

Lösungsraum

Def.:
 Der Lösungsraum des LGS $Ax=b$

($A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$) ist:

$\text{Lös}(A, b) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=b \}$

Es gilt:

ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lsg von $Ax=b$ (d.h. $Ax_0=b$)

dann ist:

$\text{Lös}(A, b) = x_0 + \text{Lös}(A, 0) = \{ x_0 + x \mid x_0 \in \text{Lös}(A, b) \}$
 $= \{ x_0 + x \mid Ax=0 \}$

Vektorräume

Ein Vektorraum ist eine alg. Struktur

(eine Menge mit Verknüpfungen)

Def.: (VR)

Eine Menge V zusammen mit einer "inneren"

Verknüpfung:

$+: V \times V \rightarrow V; (v, w) \mapsto v+w$ (Addition)

und einer "äußeren" Verknüpfung:

$\cdot: K \times V \rightarrow V; (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ (skal. Multipl.)

heißt VR, falls folgendes gilt:

(V1) V zusammen mit $+$ ist eine abelsche

Gruppe, d.h. für alle $v, w, z \in V$ gilt:

$(v+w)+z = v+(w+z)$ ($\hat{=}$ Assoziativgesetz)

[Reihenfolge spielt keine Rolle]

Die orthogonale Projektion $p_0: V \rightarrow U$

ist definiert als $p_0(v) = u_1$ wobei

$v = u_1 + u_2$ eindeutige Zerlegung.

Untervektorräume

Def.: (UVR)

Sei V ein K -VR. Eine Teilmenge $U \subseteq V, U \neq \emptyset$

heißt UVR, falls:

- 1) $u, w \in U \Rightarrow u+w \in U$ } $u, w \in U, \lambda \in K$
- 2) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$ } $\Rightarrow \lambda u + w \in U$

Ch.: (i) $U \neq \emptyset$; (ii) $0 \in U$; (iii) $\forall v, w \in U: v+w \in U$

(iv) $\forall v \in U, \lambda \in K: \lambda v \in U$

(iii) & (iv) $\Rightarrow$ Abgeschl. bzgl. $+$ & $\cdot$.

Satz: Ein UVR ist selbst ein VR (mit den

induzierten Verknüpfungen)

Dimension

Def.: Die Dimension eines VR ist die #Elemente

einer beliebigen Basis.

Dimensionsatz:

Sei $f: V \rightarrow W$ linear, $\dim(V, W) < \infty$. Dann gilt:

$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \text{Rang}(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$

$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cup W)$

$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$

$\dim(V \setminus W) = \dim(V) - \dim(W)$

$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$

$\dim(\text{Lös}(A, 0)) = n - r$, falls $\text{Rang}(A) = r, A \in K^{m \times n}$

Für $A \in K^{m \times n}$ ist $\dim(\ker(A)) \geq n - m$

Bsp.: Seien $f: A \rightarrow B$ inj., $g: B \rightarrow C$ surj.

und sei $\text{Bild}(f) = \ker(g)$

z.z.: $\dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$

Bew.: $\dim(A) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f))$

$\dim(B) = \dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(C)$

$= \dim(A) + \dim(C)$ $\square$

Gram -
 $\Rightarrow V_i =$
 $\Rightarrow W_i =$

Unitär $\Rightarrow \det(U) = \pm 1$ (A, T, D, S)
Selbstadjungiert V vekt. VR $\Leftrightarrow F \in \text{End}(V)$
 heißt "f", falls: $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$

Form
heißt Vunität

Rang einer Matrix, Matrixinversion

- Rang $(A) = \dim(\text{lin}(A)) = \max \# \text{ lin. unabh. Spalten}$

Es seien $U, W \subset V$. Es müssen zwei der drei Bedingungen erfüllt sein o.d. man W das Komplement von U in V nennt.

und ändert sich nicht bei Zeilenumformungen
 $\rightarrow \text{Rang}(A) = A$ in ZST, # Zeilen $\neq 0$
Rechenregeln: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beide
inv'bar
 (i) $\text{Rang}(QAZ) = \text{Rang}(A)$ für $Q \in \mathbb{K}^{m \times m}$ $Z \in \mathbb{K}^{n \times n}$
 (ii) $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^{tt})$ gilt $\forall$
i.A. 0
 Sei $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(ii) $0 = v_1 + \dots + v_k \Leftrightarrow v_1 = \dots = v_k = 0$
• Sei V endl. dim.

(iii) $\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) - n \leq \text{Rg}(AB) \leq \min\{\text{Rg}(A), \text{Rg}(B)\}$
Matrix inversion:

Satz 2:
Seien $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$, $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$

[reguläre Matrix $A \Rightarrow A \in GL(n)$, also $\exists A^{-1}$]
 $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inv'bar $\Leftrightarrow \exists A^{-1}: AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$
 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (lin. unabh.)
 $\Leftrightarrow \text{Rg}(A) = n \sim \text{surj.} \Leftrightarrow$ Zeilen & Spalten sind
 $\Leftrightarrow A$ ist bij. (Isomorphismus) $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$
Wie? $(A | \mathbb{1}) \leadsto (\mathbb{1} | A^{-1})$ Zeilenumformung

Axiomatischer Zugang, Eigenschaften:

Inverse:

- (i) 2×2 Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- (ii) Diagonal Matrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$
- (iii) Orthogonal Matrix: $O^{-1} = O^T$
- (iv) unitäre Matrix: $U^{-1} = U^H = \overline{U^T} = U^T$

Rechenregeln:

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
- A symm. $\Rightarrow A^{-1}$ symm.
- λ EW von $A \Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ EW von A^{-1}

ii. (3) Linearität in jeder Zeile/Spalte
 $\det(v_1, \dots, \lambda v_i + w, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, w, \dots, v_n)$

Sätze zu Isomorphismen:

(i) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V . Dann ist $f: V \rightarrow W$ linear
 $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W .

(5) Ist eine Zeile/Spalte gleich Null, so ist $\det(A) = 0$
 (6) Vertauscht man zwei Zeilen/Spalten, und

(iii) Sei $f: V \rightarrow W$ linear

a) Ist $g: W \rightarrow W$ Isom. $\Rightarrow \text{Rg}(g \circ f) = \text{Rg}(f)$

b) Ist $k: V \rightarrow V$ Isom. $\Rightarrow \text{Im}(f \circ k) = \text{Im}(f)$

Ähnlichkeit

$A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen ähnlich, falls es
inv'bares $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt, s.d. $B = TAT^{-1}$, $A = T^{-1}BT$

A, B ähnlich $\Leftrightarrow$ sie stellen dieselbe lin. Abb.
 $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ bzgl. versch. Basen von $\mathbb{K}^n$ dar.

(7) Entsteht B aus A durch Addition des λ -fachen
 (von) der ersten Zeile (von) der i-ten

$[det(A) = det(B)]$
berechnete ONB & B (alte urspr.) Basis

- (8) Ist $A = \nabla$ oder $A = \Delta$, so ist $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
- (9) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- (10) $\det(A) = \overline{\det(A)}$
- (11) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- (12) $\det(A^T) = \det(A)$
- (13) Ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, so ist $\det(A) = \det(A_1)\det(A_3)$
und analog $\det \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \end{pmatrix} = \det(B_1) \dots \det(B_n)$
- (14) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, wobei λ_i EW von A
- (15) Det. ist Basisinvariant
 $\det(B) = \det(S^{-1}BS) = 1/\det(S) \det(B) \det(S)$
- (16) Orthogonale und unitäre Matrizen haben $\det(O) = \pm 1$, da $\det(OO^T) = \det(O)\det(O^T)$
 $= \det(O)\det(O^{-1}) = \det(I) = 1$

Hermiteische Matrizen ($A^H = A$) haben $\det(A) \in \mathbb{R}$, da $\det(A^H) = \overline{\det(A)} = \det(A)$
Satz: $\det(A) = \overline{\det(A)} = \det(A)$

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ nicht inv'bar $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) < n$
- $Ax = b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Dualräume

"Zuhause jener lin. Abb., die Vektoren fressen und Zahlen ausgeben."

Def.: $V^* := \text{Hom}(V, K) = \{ \varphi: V \rightarrow K \mid \varphi \text{ lin.} \}$ Dualraum zu V
• Die Elemente von V^* heißen Linearformen und sind lin. Abb.

Def.: Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V. Die zu B duale Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eindeutig definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ und hängt also von B ab!

Bem.: Für V unendl. dim sind die v_i^* lin. unabh., aber keine Basis.

- $\dim(V^*) = \dim(V)$. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -v_1^* \\ \vdots \\ -v_n^* \end{pmatrix}$
- Berechnung: $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1^* \\ \vdots \\ -v_n^* \end{pmatrix}$
so können die v_i^* als Zeilenvektor dargestellt werden und es gilt $v_i^* v_j = \delta_{ij}$

[Inspiration: $V^*V = I$]

Nun kann eine lin. Abb. φ in Basisvektoren zerlegt werden.

Sei $\varphi = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*$ und $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
 $\varphi(v) = (a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*)(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$
 $= \dots = a_1 a_1 v_1^*(v_1) + \dots + a_n a_n v_n^*(v_n) + \dots + \delta_{ij}$
 $+ a_n a_1 v_n^*(v_1) + \dots + a_n a_n v_n^*(v_n) =$
 $= a_1 a_1 + \dots + a_n a_n = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = e_1$, $v_2 = (1, 2, 0)^T$, $v_3 = (1, 2, 3)^T$
 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow v_1^* = (1, -\frac{1}{2}, 0)$, $v_2^* = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, $v_3^* = (0, 0, \frac{1}{3})$
 mit $v_i^*(v_j) = v_i^* v_j = \delta_{ij}$

Fortsetzung auf Blatt 11
Quotientenvektorräume (Nebenklassen)

Def.: Seien V, U VR's und $U \subseteq V$.
 Der Quotientenraum $V/U = \{v+U \mid v \in V\}$ ist die Menge aller Restklassen
 $v+U = \{v+u \mid u \in U\}$ in V modulo U. Die Elemente aus V/U sind Äquivalenzklassen, also Mengen von Vektoren, die sich nur um einen Vektor aus U unterscheiden
 $\rightarrow V/U$ die Menge aller zu U parallelen affinen Unterräume.

- V/U ist ein VR mit $a+u = b+u \Leftrightarrow a-b \in U$ und Addition $(v_1+U) + (v_2+U) = v_1+v_2+U$ und skalarer Multiplikation $\lambda(v+U) = \lambda v+U$ und Nullelement $0+U = U$ da isom.
- $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U) = \dim(W)$

Def.: Die surj. lin. Abb. $p: V \rightarrow V/U$ heißt kanonische Projektion, mit $\ker(p) = U$

- Sei W ein lin. Komplement von U in V, also $U \oplus W = V$. Dann ist $V/U \cong W$, also $p|_W: W \rightarrow V/U$ ein Isomorphismus.
- Sei $f: V \rightarrow W$ linear, $U \subseteq \ker(f)$. Dann ist die Abb. $\bar{f}: V/U \rightarrow W$, $\bar{f}(v+U) = f(v)$

(a) Seien die Spalten von $A = (a_1 \dots a_n)$ eine Basis.
 $\rightarrow q_1 = a_1/\|a_1\|, \dots, q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle q_j, a_k \rangle q_j, q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|$
 $\rightarrow Q = (q_1 \dots q_n)$

wohldefiniert und linear und heißt die von f induzierte Abb. [$\Rightarrow$ univ. Eigenschaft]
 $\varphi: \{f: V \rightarrow W, f|_U = 0\} \rightarrow \text{Hom}(V/U, W)$
 $f \mapsto \bar{f}$ ist bij. und linear

• Motivation: Inhomogene DGL's haben als Lösungsraum ein Element eines Quot.-VR. Die partikuläre Lsg ist das $v \in V$ und der Raum der hom. Lsg ist U.

Bsp.: $f''(t) = 5 \Rightarrow f_k(t) = a_k t + a_0, f_p = \frac{5}{2} t^2$
 Es sind dann $V = P_2(t)$ und $U = P_1(t)$ und die allg. Lsg ist $f(t) = f_p + U$.

Bsp.: aus Serie. Eindeutigkeit:
 $\Rightarrow a-b \in U' \cap U$ mit: $\{a \in U' \mid \exists a-b \in U'\}$
 $\{a \in U' \mid \exists a-b \in U'\} = \{a \in U' \mid \exists a-b \in U'\}$

$U' \cap U = \{0\} \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$.

Satz Tessa: (universelle Eigenschaft)
 V K-VR und $U \subseteq V$ UVR
 $\rightarrow K$ -VR V/U erfüllt univ. Eigenschaft.

$F: V \rightarrow W$ linear mit $U \subseteq \ker(F)$ ($\pi: V \rightarrow V/U$)
 $\Rightarrow \exists! \bar{F}: V/U \rightarrow W$ linear mit $F = \bar{F} \circ \pi$ mit $\pi(v) = v+U$

Spur einer Matrix

Def.: $\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, λ_i EW von A

Rechenregeln:

- (i) $\text{spur}(A+B) = \text{spur}(A) + \text{spur}(B)$
- (ii) $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA) \neq \text{spur}(A)\text{spur}(B)$
- (iii) $\text{spur}(\lambda A) = \lambda \text{spur}(A)$
- (iv) $\text{spur}(A) = \text{tr}(S^{-1}RS) \stackrel{(ii)}{=} \text{tr}(SS^{-1}R) = \text{tr}(R)$
- (v) $\det(\exp(A)) = \exp(\text{spur}(A))$
 (tutlich, um den Rotationswinkel einer orthog. Matrix zu bestimmen.)

Exkurs: Vandermonde-Formel (zu Def.)

$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$
 (2) $R \rightarrow r_k = \|a_k\|$
 $r_{jk} = \langle q_j, a_k \rangle$ für $j=1, \dots, k-1, k=2, \dots, n$
 $r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$ für $k=2, \dots, n$
 $r_{jk} = 0$ für $j > k$

Normale Abb. Matrizen
 • aus Serie: F entweder unitär or selbstadj.
 $\Rightarrow F$ normal
 Bem.: Um eine vollständige QR-Zerlegung zu erhalten, ergänze Q mit weiteren (m-n) Vektoren zu einer OGB und füge an Reihe Nullmatrix der Größe (m-n) x n hinzu (unten).

Multilineare & alternierende Fkt

$\text{Alt}_n(V^n)$: n -linear & alternierende Fkt in V^n
 $(\varphi \in \text{Alt}_n(V^n); \varphi: V^n \rightarrow K, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n))$

- (i) n -linear, d.h. für jede Koord. gilt:
 $\varphi(v_1, \dots, \lambda v_i + v'_i, \dots, v_n) = \lambda \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$
- (ii) φ ist alternierend, d.h. falls $v_i = v_j$ für $i \neq j \Rightarrow \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$

Permutation & Fehlstand

Def.:

Permutation ist bij. Abb. von Menge X zu sich selbst. (z.B. $X = \{1, \dots, n\}$)
 $\rightarrow \sigma = \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bij.}$
 $= \{ \sigma = (\sigma(1) \dots \sigma(n)) \}$

Def.:

Paar $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ heißt Fehlstand falls
 $\rightarrow i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$
 $\rightarrow i > j$ und $\sigma(i) < \sigma(j)$
 $\Rightarrow$ Signum von $\sigma \in S_n$ $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{\#\text{Fehlstände}}$

Cramersche Regel

Zum Lösen von lin. Gl.-Systemen $Ax=b$ mit $\det(A) \neq 0$

- (i) bestimme $\det(A)$
- (ii) definiere $A_i := (a_1 \dots a_{i-1} \mid b \mid a_{i+1} \dots a_n)$ und berechne $\det(A_i)$ für $i=1, \dots, n$
- (iii) Cramer R.: $x_i = \det(A_i) / \det(A)$
 $\rightarrow$ schnell für A klein, b viele Nullen

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \hat{=} Ax=b$

- (i) $\det(A) = -15$, (ii) $\det(A_2) = -35 - 15a$
- (iii) $z = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}a$

Polynom, Polynomiale Fkt, Faktorzerlegung

• Der Grad $\deg(p)$ von $p = a_0 + \dots + a_n t^n$ ist n , falls $a_n \neq 0$.

- (i) $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$
- (ii) $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$

Konvention: Grad des Nullpolynoms ist $-\infty$.

• Seien $p, q, r \in K[t]$. Wenn $p = qr$, dann heißen q, r Teiler von p .

• Polynomdivision: Sei $\deg(p) \geq \deg(q)$, $q \neq 0$. Dann gibt es eindeutige Polynome s (Quotient) und r (Rest), s.d.:

- (i) $p = qs + r$ ($\frac{p}{q} = s + \frac{r}{q}$)
- (ii) $\deg(r) < \deg(q)$

• Ein Polynom $p \neq 0$ vom Grad n hat höchstens n NST.

• Die Vielfachheit k einer NST $\lambda \in K$ ist die grösste Zahl k , s.d. $p(t) = (t-\lambda)^k q(t)$, $q(\lambda) \neq 0$.
 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die versch. NST von $p \neq 0$ und $k_1, \dots, k_r$ ihre Vielfachheiten. Dann ist
 $p(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \dots (t-\lambda_r)^{k_r} q(t)$, wobei $q(t)$ keine NST hat.

• Ein Körper K heisst algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit Koeff. in K mind. eine NST hat. Ist K alg. abgeschl., so lässt sich jedes Polynom eindeutig in Lin'faktoren zerlegen, also
 $p(t) = (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_n)$.

Fundamentalsatz der Algebra:

$\mathbb{C}$ ist alg. abgeschl.

• $p \in \mathbb{R}[t]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ NST $\Rightarrow$ auch $\bar{\lambda}$ eine NST.

Eigenwerte und Eigenvektoren $Av = \lambda v, v \neq 0$

Tipps zum NST finden:

- (i) $-1, 0, 1$ ausprobieren
- (ii) Teiler von a_0 ausprobieren, $a_0 = 8 \Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 4$
- (iii) Binomialkoeffizienten

Eigenraum:

λ EW von $f \Leftrightarrow \text{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \neq \{0\}$
 $= \{v \in V \mid f(v) - \lambda v = 0\} = \{v \in V \mid (f - \lambda \text{id})(v) = 0\}$
 $= \ker(f - \lambda \text{id})$

• Sind $v_1, \dots, v_k$ EV zu versch. EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so sind sie lin. unabh.

• Alg. Vielfachheit $\text{alg}(\lambda)$: Vielf. der NST
 Geom. " $\text{geom}(\lambda) = \dim(\text{Eig}(A, \lambda))$
 $1 \leq \text{geom}(\lambda_i) \leq \text{alg}(\lambda_i)$

• A inj. $\Rightarrow 0$ ist ein EW
 A surj. $\Rightarrow 0$ ist kein EW

Diag'barkeit

$A \in K^{n \times n}$ diag'bar $\Leftrightarrow \exists S$ inv'bar, D diagonal s.d. $A = SDS^{-1}$

$\Leftrightarrow \chi_A(t)$ zerfällt in Lin'faktoren
 $\Leftrightarrow \exists$ Basis von K^n aus EV von A
 $\Leftrightarrow \text{alg}(\lambda_i) = \text{geom}(\lambda_i) \forall i$

$\Leftrightarrow \sum \text{geom}(\lambda_i) = n$
 $\Leftrightarrow V = \bigoplus_i \text{Eig}(A, \lambda_i)$, d.h. $V = \sum_{i=1}^r \text{Eig}(A, \lambda_i)$, $\text{Eig}(\lambda_i) \cap \text{Eig}(\lambda_j) = \{0\}$ $i \neq j$

$\Rightarrow m_A(t) = (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_r)$

• Hat $\chi_A(t)$ n versch. NST bzw. EW $\Rightarrow A$ diag'bar

• Algorithmus:

- (1) Finde EW $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
- (2) Finde EV v_i zu λ_i
- (3) prüfe Diag'barkeitskrit.
- (4) $T = (v_1 \dots v_n)$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

• Tipp: Für A reell:

$\lambda \in \mathbb{C}$ EW, $z \in \mathbb{C}$ EV $\Rightarrow A\bar{z} = \bar{\lambda} \bar{z} = (\overline{Az}) = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \bar{z}$ neu

Triagonalisierung

Sei $f \in \text{End}(V)$, $\dim(V) < \infty$.

$\chi_f(t) = \prod_i (t-\lambda_i)$, $A \in K$ es wird nichts über Vielf. gesagt!

Bsp.: (aus Serie) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(i) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}) = -(\lambda-2)^3 \Rightarrow \lambda=2$, alg. V. 3

(ii) $\ker(A - 2 \text{id}) = \langle (1, -1, 1)^T \rangle \Rightarrow EV_\lambda = (1, -1, 1)^T$

(iii) wähle T_K^B & finde $T_K^B = (T_K^B)^{-1}$, $K = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\Rightarrow T_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (iv) berechne $M_B^B(A) = T_K^B M_K^K(A) T_K^B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \hat{=} A'_2$

(v) $P_{A'_2}(\lambda) = -(\lambda-2)^3$, wobei $A'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=2$, alg. V. 2

(vi) $\ker(A'_2 - 2 \text{id}) = \langle (1, -1)^T \rangle \Rightarrow EV'_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow EV'_\lambda = (0, 1, -1)^T$

(vii) wähle $T_{B'_2}^B$ & finde $T_{B'_2}^B$.

$B = \{(1, -1, 1)^T, e_2, e_3\}$, $B'_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$
 wobei i.A. b_i Spalten mit Koeff. von der Lin'komb.
 $b_i = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$ als Eintäge hat.

(v_1, e_2, e_3 entsprechen i.A. immer den Basisvekt. durch ursprüngl. Basis, d.h. von wo wir kommen.)

⑤

$$\frac{u}{k} =$$

1. Lineare Glsysteme - Gauss

1.3 Die Lsg-Menge eines lin. Glsystems

Kor. 1.3: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

(i) $Ax=b$ hat genau eine Lsg

$\Leftrightarrow (r=n=m)$ oder $(r=n < m \text{ und } c_{r+1} = \dots = 0)$

(ii) $Ax=b$ hat für jedes b (mindestens) eine Lsg $\Leftrightarrow r=m$

(iii) $Ax=b$ hat für jedes b genau eine Lsg $\Leftrightarrow r=m=n$.

Kor. 1.5: Ein hom. Glsystem hat genau dann nichttriviale Lsg, wenn $r < n$ ist. Dann gibt es eine $(n-r)$ -parametrische Lsgchar.

Ein hom. System mit $m < n$ hat stets eine mind. $(n-m)$ -parametrische char nichttriviale Lsg.

Kor. 1.6: Ein quadr. lin. Glsystem ist genau dann für beliebige b lösbar, wenn das zugehörige hom. System nur die triviale Lsg hat.

Kor. 1.7: Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $Ax=b$ gelten entweder die vier äquivalenten Aussagen:

- (i) $r := \text{Rang}(A) = n$ (d.h. A ist regulär)
- (ii) $\forall b \exists$ Lsg
- (iii) $\forall b \exists!$ Lsg
- (iv) das entsprechende hom. System triv. Lsg

oder es gelten die fünf äquivalenten Aussagen:

- (v) $r := \text{Rang}(A) < n$ (d.h. A ist singular)
- (vi) für gewisse $b \nexists$ Lsg
- (vii) $\nexists b$ gibt es eine eindeutige Lsg
- (viii) für gewisse $b \exists$ unendl. viele Lsg
- (ix) das entsprechende hom. System hat nichttriv. Lsg.

2. Matrizen & Vektoren in $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$

2.3 Die Transponierte Matrix; symm./herm. Matrizen

Def.: Eine quadr. Matrix A ist schief-symmetrisch, falls $A^T = -A$.

Satz 2.6 (light)

(i) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(siehe Selbstadjungierte)

Satz 2.7: (i) für symm. (quadr.) Matrizen A, B gilt:

$AB = BA \Leftrightarrow AB$ symm. (also AB kommutiert)

(ii) für beliebige Matrizen gilt:

AA^T und $A^T A$ sind symm.

Analog für hermitesche Matrizen!

2.4 Das SP & die Norm von Vektoren

Bem. 1: Norm.

(N1) Pos. Def'heit: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) abs. Homog.: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) Δ -Ungl.: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.5 Das äussere Produkt & die orth. Projektion auf Gerade

Bem. 2: (i) inneres Produkt: $\langle x, y \rangle = x^T y$.

(ii) äussere Produkt: $x \in \mathbb{K}^m, y \in \mathbb{K}^n: xy^T \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

Satz 2.15: Die orthogonale Projektion $P_y x$ des

n -Vektors x auf die durch $y \in \mathbb{R}^n$ Ursprung induzierte

Gerade ist: $P_y x := \frac{1}{\|y\|^2} y y^T x = u u^T x, u := \frac{y}{\|y\|}$.

(i) (y -Richtung) $P_y x = \alpha y, \alpha \in \mathbb{K}; P_y x$ ist Pkt auf y .

(ii) (x -Richtung) $(x - P_y x) \perp y$. [y ein n -Vektor]

Bem. 3: Projektionsmatrix.

$P_y := \frac{1}{\|y\|^2} y y^T = u u^T =: P_u, u := \frac{y}{\|y\|}$.

$P_y^H = P_y$ (hermitesch/symm.)

$P_y^2 = P_y$ (idempotent)

2.8 Orthogonale & unitäre Matrizen

Satz 2.20: Sind A & B unitäre (orthogonale)

$n \times n$ Matrizen, so gilt:

(i) A ist regulär & $A^{-1} = A^H$ ($A^{-1} = A^T$)

(ii) $AA^H = I_n$ ($AA^T = I_n$)

(iii) A^{-1} ist unitär (orthogonal)

(iv) AB ist unitär (orthogonal)

Bem. 4: Givens-Rotation (Matrix-Rotation).

(i) Rot. um z -Achse: $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos & 0 & -\sin \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin & 0 & \cos \end{pmatrix}$

(ii) Rot. um y -Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix}$

(iii) Rot. um x -Achse: $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin & 0 & \cos \end{pmatrix}$

Bem. 5: Householder-Spiegelung (Matrix-Spiegelung)

Sei $u \in \mathbb{K}^n$ mit $\|u\| = \|u^H\| = 1$. Dann ist $u u^H \in \mathbb{K}^{n \times n}$

mit $(u u^H)_{ij} = u_i \bar{u}_j$. Die zu u gehörende H -Matrix ist

$Q_u = I_n - 2 u u^H$. Sie lässt sich durch die

Projektion (Bem. 3) auf die Richtung u ausdrücken:

$Q_u = I_n - 2 P_u, P_u := u u^H$.

P_u & Q_u sind hermitesch (symm.). Q_u ist wegen

$P_u^2 = P_u$ orthogonal: $Q_u^2 = Q_u^H Q_u = I_n$.

Satz 2.21: Die durch eine orthog. or unitäre $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

definierte Abb. ist längentreu (or isometrisch) &

winkeltreu, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \|Ax\| = \|x\|$ & $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, y \rangle$.

3. Die LU-Zerlegung

3.1 Gauss als LU-Zerlegung Δ nur ergänzend zum Ori ZF Δ

Satz 3.1: $P \hat{=}$ Permutationsmatrix (siehe Bem. 7)

$PA = LR, Lc = Pb, Rx = c$

Bem. 6: LDU-Zerlegung. $PA = LDU$

mit $U_i := D^{-1} U, D := \text{diag}(u_{11}, \dots, u_{nn})$

Bem. 7: Fischer 2.7 Elementarmatrizen.

(I) Zeile i mit Zeile j vertauschen, $P_{ij} \circ A$,

$P_{ij}^T = P_{ij}^{-1} = P_{ij}, P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$

(II) Zeile i mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren, $N_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \end{matrix}$

(III) Zeile i durch (Zeile $i + \lambda \cdot$ Zeile j) ersetzen

$G_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$

3.4 Die Cholesky-Zerlegung

Bem. 8: Ist A hermitesch (symm.) und die Zer-

legung ohne Zeilenvertauschen möglich, so ist $P=I$

und $U_i = L^H$, s.d. gilt: $A = LDL^H$. [$PA = LR \Leftrightarrow PA = LDU_i$]

Bem. 9: Cholesky-Zerlegung. Sind zu Bem. 8 zudem

die Diagonalelemente $d_{ii} := r_{ii}$ von D positiv, dann gilt

$D^{1/2} := \text{diag}(\sqrt{r_{11}}, \dots, \sqrt{r_{nn}})$. Setze $\tilde{R} := D^{1/2} L^H$.

Cholesky-Zerl.: $A = \tilde{R}^H \tilde{R}$. Δ Abg. siehe Ori ZF Δ

Def.: Eine reell symm. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heisst positiv pos.

definit, falls $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$. ($\hat{=}$ semidef.)

Satz 3.8: Eine reell symm. or hermitesche Matrix A

ist genau dann pos. def., wenn eine Chol.-Zerl.

hat, worin $\tilde{R}$ eine (reelle bzw. komplexe) ∇ -Matrix mit

positiven Diagonalelementen ist.

4. Vektorräume

4.4. Basiswechsel, Koordinatentransformation

Chara.: Zu jeder Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi_B: \mathbb{K}^n \rightarrow V$, $\Phi_B(x) = \phi(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ mit $\Phi_B(e_i) = v_i$.
 $\rightarrow$ ordnet x seine Koord. bzgl. B zu.

Seien V mit Basis $A = (v_1, \dots, v_n)$ und W mit Basis $B = (w_1, \dots, w_m)$ VR über $\mathbb{K}$. Dann gibt es zu jeder lin. Abb. $f: V \rightarrow W$ genau eine Matrix $M_B^A(f) = (a_{ij})$, s.d. $f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$ für $j=1, \dots, n$.
 Die Matrix $M_B^A(f)$ hat als j -te Spalte den Vektor der Koordinaten von $f(v_j)$ bzgl. der Basis B .

insbesondere: Falls $\text{Rang}(f) = r$, dann $\exists$ Basen A' von V , B' von W s.d. $M_{B'}^{A'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist $M_{B'}^A(f) = \Phi_{B'} \circ f \circ \Phi_A = T_{B'}^B M_B^A(f) T_A^{A'}$.

• Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix} = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A$ für $f: V \rightarrow V$ lin. mit Basen $A = (v_1, \dots, v_n)$, $B = (w_1, \dots, w_m)$ von V . Wie? Schreibe $w_i = s_{i1} v_1 + \dots + s_{in} v_n, \dots$

$w_n = s_{n1} v_1 + \dots + s_{nn} v_n$.
 • $M_B^B(f) = T_B^A M_A^A(f) T_A^B$ bzw. $M_{B'}^{B'}(f) = T_{B'}^B M_B^B(f) T_B^{B'}$

• Insbesondere: ist A die std-Basis und B ist in der std-Basis gegeben, dann ist T_B^A die Matrix mit Vektoren von B in den Spalten.

• Rechenregeln: $T_{B'}^{B'} \circ T_B^{B'} = T_B^{B'}$, $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
 $T_{BB} = \mathbb{I}_n \Rightarrow T_B^B \circ T_B^B = \mathbb{I}_n$

• Kochrezept Heidi: $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basen v. V

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{b_1 \dots b_n}_{=B} & \underbrace{a_1 \dots a_n}_{=A} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\mathbb{I}_n \mid T_B^A \right)$$

$$\rightarrow \left(\underbrace{a_1 \dots a_n}_{=A} \mid \underbrace{b_1 \dots b_n}_{=B} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(T_A^B \mid \mathbb{I}_n \right)$$

Def. (Fischer): Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ heißen äquivalent, wenn es $S \in GL(m; \mathbb{K})$ & $T \in GL(n; \mathbb{K})$ gibt mit: $B = SAT^{-1}$.

Falls $m=n$ nennen wir $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ ähnlich, wenn es ein $S \in GL(m; \mathbb{K})$ gibt mit: $B = SAS^{-1}$.

5. Lineare Abbildungen

5.1 Definitionen, Rang

Bem. 1: Ist der Bildraum Y der Skalarkörper $\mathbb{K}$, so bezeichnet man eine lin. Abb. als lin. Funktional.

Bem. 2: Sind Definition- & Bildraum Euklidische Räume, so spricht man statt von einer lin. Abb. von einem linearen Operator.

Kor. 5.10: Sind $F: X \rightarrow Y$, $G: Y \rightarrow Z$ endl. dim. lin. Abb.

- (i) $\text{Rang}(FG) \leq \min \{ \text{Rang}(F), \text{Rang}(G) \}$,
- (ii) G inj. $\Rightarrow \text{Rang}(GF) = \text{Rang}(F)$,
- (iii) F surj. $\Rightarrow \text{Rang}(GF) = \text{Rang}(G)$.

5.3 Matrizen als lin. Abb.

Satz 5.13: Für eine quadr. Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind Aussagen äquivalent:

- (i) A ist inv. bar
- (ii) $\det(A) \neq 0$
- (iii) A ist regulär
- (iv) wenn A hermitesch $\Leftrightarrow B$ hermitesch
- (v) wenn A unitär $\Leftrightarrow B$ unitär
- (vi) die n Spaltenvektoren von A sind lin. unabh.
- (vii) die n Zeilenvektoren von A sind lin. unabh.
- (viii) $\text{im}(A) = \mathbb{K}^n$
- (ix) $\ker(A) = \{0\}$
- (x) A ist die Transformationsmatrix einer Koord.trafo in $\mathbb{K}^n$

6. Vektorräume mit Skalarprodukt

6.1 Normierte VR

Def. (Norm): siehe Blatt I (mitte) Bem. 1.

Bem. 10: Sei $f \in C[a, b]$. $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ heißt L_1 -Norm (1-Norm) und $\|f\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ heißt L_∞ -Norm (Max.-norm).

6.3 Orthonormalbasen (siehe auch Blatt 1, 2 Rand)

Satz 6.4: Ist V ein n -dim. VR mit SP und ONB $= (b_1, \dots, b_n)$, so gilt für alle $x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^n \langle b_k, x \rangle b_k = \sum_{k=1}^n \xi_k b_k \text{ mit } \xi_k = \langle b_k, x \rangle$$

Satz 6.5 (Parsevalsche Formel): Unter Voraussetzung von Satz 6.4 gilt mit $\xi_k = \langle b_k, x \rangle$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = \langle \xi, \eta \rangle$$

d.h. das SP zweier Vektoren in V ist gleich dem SP ihrer Koord. bzgl. ONB.

Fischer orthog. Mengen: A orthog.

$$O(n) := \{ A \in GL(n; \mathbb{R}) : A^{-1} = A^T \}$$

$$U(n) := \{ A \in GL(n; \mathbb{C}) : A^{-1} = A^H \}$$

dem (euklidischen) SP ihrer Koordinatenvektoren im $\mathbb{K}^n$. Insbesondere gilt:

$$\|x\| = \|\xi\|, \quad \langle x, y \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad x \perp y \Leftrightarrow \xi \perp \eta$$

6.4 Orthogonale Komplemente

Def. (orthogonale Komplement): Sei V ein endl. dim. VR mit SP. $U \subset V$, $U^\perp \subset V$.

$$U^\perp := \{ x \in V \mid x \perp U \}$$

Bem. 11: Weiter gilt (i) $(U^\perp)^\perp = U$

$$(ii) \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

Satz 6.10: Die Transformationsmatrix einer Basis- und ONB ist unitär/orthogonal:

$$A = T^* T \Rightarrow T^{-1} = T^*$$

Bem. 12: Seien folgend $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $T \in O(n)$ or $U(n)$
 $B = T^* A T, \quad A = T B T^*$

(i) wenn A hermitesch $\Leftrightarrow B$ hermitesch

(ii) wenn A unitär $\Leftrightarrow B$ unitär

6.7 Normen von lin. Abb. (Operatoren) und Matrizen

Def.: Die auf $L(X, Y)$ durch die Normen $\|\cdot\|_X$ & $\|\cdot\|_Y$ induzierte Operatornorm ist definiert durch:

$$\|f\|: L(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \|f\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} \|f\|_X \quad (i)$$

Ist $X=Y=\mathbb{K}^n$ s.d. f durch eine quadr. Matrix A gegeben ist, heißt $\|A\|$ die durch die Vektornorm (in $\mathbb{K}^n$) induzierte Matrixnorm von A :

$$\| \cdot \|: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \quad (ii)$$

Verwendet man in $\mathbb{K}^n$ die euklidische 2-Norm, so heißt die induzierte Matrixnorm Spektral-Norm (or 2-Norm):

$$\|A\|_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{1}{\|x\|_2} \|Ax\|_2 \quad (iii)$$

Lem. 6.17: Sei $\|x\| = 1$.

$$(i) \|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_Y$$

$$(ii) \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$(iii) \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}$$

Satz 6.18: Die durch Def. (i) induzierte Operatornorm hat die folgenden Eigenschaften:

(OpU) pos. def.: $\|f\| \geq 0$ ($\forall f \in L(X, Y)$), $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(OpN) abs. Homog.: $\|a f\| = |a| \|f\|$ ($\forall f \in L(X, Y), \forall a \in \mathbb{K}$).

(OpN3) Δ -Ungl.: $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$ ($\forall F, G \in L(X, Y)$).

(OpN4) Für zusammengesetzte Abb. gilt:

$$\|G \circ F\| \leq \|G\| \|F\| \quad (\forall F \in L(X, Y), \forall G \in L(Y, Z)).$$

(OpN5) kompatibel mit Vektornormen in X, Y :

$$\|F x\|_Y \leq \|F\| \|x\|_X \quad (\forall F \in L(X, Y), \forall x \in X).$$

(OpN5) Für die Matrixnorm gilt analog z. (OpN5):

$$\|A x\| \leq \|A\| \|x\| \quad (\forall A \in K^{n \times n}, \forall x \in K^n) \text{ und heißt}$$

kompatibel mit der in K^n verwendeten Vektornorm.

$$\text{Def.: (Frobenius-Norm): } \|A\|_F := \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |a_{kl}|^2 \right)^{1/2}.$$

Def.: Die Konditionenzahl eines regulären Matrix A

bzgl. einer Matrixnorm oder einer Vektornorm mit

der induzierten Operatornorm ist die Zahl:

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

$$2\text{-Norm-Konditionenzahl: } K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

7. Methode der kleinsten Quadrate & QR-Zerlegung

7.1 Orthogonalprojektion

Def.: $P \in \text{End}(K^m)$ heißt Projektion falls:

$$P^2 = P. \text{ Eine Projektion heißt Orthogonalprojektion, falls zusätzlich gilt: } \ker(P) \perp \text{im}(P).$$

Andernfalls ist es eine schiefe Projektion.

Lem. 7.1: Ist P eine Projektion $\Rightarrow I - P$ eine Projekt.

und es gilt: (i) $\text{im}(I - P) = \ker(P)$; (ii) $\ker(I - P) = \text{im}(P)$.

Satz 7.2: Eine Projektion $P \in \text{End}(K^m)$ sind folgende

Aussagen äquivalent: (i) P ist orthog. Projektion;

(ii) $I - P$ ist orthog. Projektion; (iii) $P^H = P$.

Lem. 7.3: Sind die Kolonnen einer $m \times n$ -Matrix A

lin. unabh., d.h. $\text{Rang}(A) = n (\leq m) \Rightarrow A^H A$ ist regulär.

Satz 7.4: Die Orthogonalprojektion $P_A: K^m \rightarrow \text{im}(A) \subset K^m$

einer $m \times n$ -Matrix A mit $\text{Rang}(n) (\leq m)$ ist geg. durch:

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H. \quad (*) \quad Q^H Q = I \Leftrightarrow Q^H = Q^{-1}$$

Kor. 7.5: Die Orthogonalprojektion

$P_Q: K^m \rightarrow \text{im}(Q) \subset K^m$ einer $m \times n$ -Matrix $Q = (q_1 | \dots | q_n)$

mit orthonormalen Kolonnen (*) ist geg. durch:

$$P_Q = Q Q^H. \quad \text{Es gilt also für jeden } y \in K^m:$$

$$P_Q y = Q Q^H y = \sum_{j=1}^n q_j q_j^H y = \sum_{j=1}^n q_j \langle q_j, y \rangle.$$

Satz 7.6: Für eine Orthogonalprojektion P gilt:

$$\|y - P y\|_2 = \min_{z \in \text{im}(P)} \|y - z\|_2.$$

7.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

Wir betrachten das überbestimmte lin. Gleichungssys. eines EW's ist bei ähnlichen Matrizen gleich.

$$A x = y \quad \text{mit einer ("hohen") } m \times n\text{-Matrix } (m > n).$$

Def.: (Residuenvektor (Residuum)) $r := y - A x$

Bem. 13: Wir wollen das Residuum r minimieren, d.h.

dass die Quadratsumme der euklidischen Norm

(2-Norm): (i) $\|r\|_2^2 = \sum_{k=1}^m r_k^2, \quad r \in \mathbb{R}^m$

(ii) $\|r\|_2^2 = \sum_{k=1}^m |r_k|^2, \quad r \in \mathbb{C}^m$, minimal ist.

Die entsprechende Lsg. x heißt die Lsg. im Sinne

der kleinsten Quadrate.

Bem. 14: Ang. Kolonnen von A sind lin. unabh., also

$\ker(A) = \{0\}$ gilt und $A^H A$ gem. Lem. 7.3 regulär ist.

Auf Grund von Satz 7.6 wissen wir, dass $\|r\|$ min.

ist wenn gilt: $A x = P_A y$, d.h. $A x = A(A^H A)^{-1} A^H y$.

$$\stackrel{\ker(A)=\{0\}}{\Leftrightarrow} x = (A^H A)^{-1} A^H y \Rightarrow A^H A x = A^H y \quad \text{Normalgleichung.}$$

Def.: (Pseudoinverse) $A^+ := (A^H A)^{-1} A^H$

$$\Rightarrow A^+ A = (A^H A)^{-1} A^H A = I \quad \ker(A) = \{0\}$$

$$\stackrel{A \in \mathbb{R}^m}{\Rightarrow} A A^+ = A (A^H A)^{-1} A^H \neq I$$

Satz 7.7: Es sei $A \in K^{m \times n}$, $\text{Rang}(A) = n \leq m, y \in K^m$.

Dann hat das überbestimmte Glsys. $A x = y$ eine

einzigste Lsg. x im Sinne der kleinsten Quadrate, d.h. x mit

$$\|A x - y\|_2^2 = \min_{x \in K^n} \|A x - y\|_2^2$$

kann berechnet werden durch das Lösen der

Normalgleichung. Dann oder unitären $F \in \text{End}(V)$, so ist:

gilt $r \perp \text{im}(A)$.

7.3 Die QR-Zerlegung einer Matrix

Bem. 15: $A = Q R, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{ONB } Q \in \mathbb{R}^{m \times m}, R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Satz 7.3 (Lagrange): $r = y - \sum_{j=1}^n q_j \langle q_j, y \rangle = y - Q Q^H y$,

$$A x = y \Leftrightarrow Q R x = y \Leftrightarrow R x = Q^H y.$$

3. Eigenwerte & Eigenvektoren

3.1 EW & EV von Matrizen und lin. Abb.

Fv $= \lambda v, v \neq 0$

Bem. 16: Die Menge aller EW von F heißt Spektrum

von F und wird mit $\sigma(F)$ bezeichnet.

3.2 Eigenwertzerlegung

Satz 3.7 Ähnliche Matrizen haben dasselbe char.

Polynom; gleiche Det; gleiche Spur; gleiche EW.

Sowohl die geom. als auch die alg. Vielfachheit

eines EW's ist bei ähnlichen Matrizen gleich.

Def.: $A = V \Lambda V^{-1}$ heißt Spektralzerlegung or

EW-Zerlegung von $A, \Lambda = \text{diag}(\lambda_i), i=1, \dots, n; V = (E v_i)$

Def.: Ein Vektor w , für den gilt $w^T A = \lambda w^T$ heißt

linker EV von A und existiert nur wenn A diag'bar.

3.3 EW & EV symm. und hermitesche Matrizen (selbstadjungiert)

Fischer: Selbstadjungierte Endomorphismen

Def.: Ein Endomorphismus F eines euklidischen

bzw. unitären VR V heißt selbstadjungiert, wenn:

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Satz: Sei $F \in \text{End}(V)$ und B eine ONB. Dann gilt:

F selbstadj. $\Leftrightarrow M_B^B(F)$ symm. bzw. hermitesch.

Lem.: Ist F selbstadj., so sind (auch im komplexen

Fall) alle EW reell. Insbesondere hat eine hermitesche

Matrix nur reelle EW.

Thm.: Ist $F \in \text{End}(V)$ eines euklidischen bzw. unitären

VR V , so gibt es eine ONB von V , die aus EV von

F besteht.

Kor.: Ist $A \in M(n \times n; K)$ eine symm. bzw. herm.

Matrix, so gibt es eine orthog. bzw. unitäre

Matrix S , s.d. $S^T A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Kor.: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die versch. EW eines selbstadj.

oder unitären $F \in \text{End}(V)$, so ist:

$$V = \text{Eig}(F; \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(F; \lambda_k)$$

Bem. 17: Zur praktischen Berechnung einer

ONB aus EV kann man wie folgt vorgehen:

(1) bestimme die Linearfaktorzerl. den char.

Polynoms: $P_F = \pm(t - \lambda_1)^{r_1} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$,

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise versch. sind.

(2) Für jeden EW λ der Vielf. r bestimme eine

Basis von $\text{Eig}(F; \lambda)$, d.h. finde alle $E v_\lambda$.

(3) Man orthonormalisiere die in (2) erhaltenen

Basen $(E v_\lambda)$ mit Gram-Schmidt, und zwar

unabh. voneinander in den versch. Eigenräumen.

(4) Die k Basen $(E v_\lambda)$ der Eigenräume aus (3)

bilden zusammen die gesuchte ONB aus EV von V .

Satz 3.15: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so gilt:

- i) Alle EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reell.
- ii) Die EV zu versch. EW sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n$.
- iii) Es gibt eine ONB des $\mathbb{C}^n$ aus EV $u_1, \dots, u_n$ von A.
- iv) Für die unitäre Matrix $U := (u_1, \dots, u_n)$ gilt:
 $U^H A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3.4 JNF

Minimalpolynom (Miro).

Sei $A \in \text{Mat}(n \times n; K)$. Das Minimalpolynom m_A von A ist das eindeutig normierte Polynom kleinsten Grades, s.d. $m_A(A) = 0$.

Eigenschaften:

- (1) m_A teilt das char. Polynom von A (weil $p_A(A) = 0$ aus Cayley-Hamilton).
- (2) insbesondere ist $\deg(m_A) \leq \deg(p_A) = n = \dim(V)$.
- (3) $\chi_A(\lambda) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$.

Bem. 18: (i) #EW $\Rightarrow$ # Jordan-Blöcke J_j .

(ii) alg. V $r_j \Rightarrow$ Länge des J-Blockes J_j zum EW λ_j .

(iii) geom. V $\Rightarrow$ # J-Kästchen J_j in J_j zum EW λ_j .

(iv) $\deg(m_A) = d_j \leq r_j \Rightarrow$ Länge eines J-K. J_j zum EW λ_j .

Satz (Tema): Seien V ein K -VR mit $\dim(V) = n$ & $F \in \text{End}(V)$, s.d. sein char. Polynom in Linearfaktoren über K zerfällt, also $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ mit paarweise versch. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$. Dann gibt es eine Basis B von V , s.d. $M_B^B(F)$ aus k Diag-Blöcken J_j besteht, die wiederum aus Diag-Blöcken der Form $J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}$ bestehen.

JNF Algo (Tema): $A := \text{diag}(A_1, A_2)$ mit $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen p_A von A & benutze Bem. 18.

$p_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3$

(i) Für J_j & JNF-Basis rechne wie folgt weiter. Man setze $A' = A - \lambda_j I$ und bestimme eine Basis von $\ker(A')$, $\ker(A'^2)$, ... solange, bis minimales p gefunden ist, s.d. $\dim(\ker(A'^p)) = \dim(\ker(A'^{p+1}))$.

beachte $k \leq p \leq r_j$. $p \Rightarrow$ Längen von J_j zum EW λ_j .
 $A' = \text{diag}(A'_1, A'_2), A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{rang}(A') = 4$
d.h. $\dim(\ker(A')) = 1$: $\ker(A') = \langle \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \rangle$.
 $A'^2 = \text{diag}(A'^2_1, A'^2_2), A'^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A'^2_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. $\dim(\ker(A'^2)) = 2$
 $\ker(A'^2) = \langle e_1, e_2 \rangle$.

$\dim(\ker(A'^3)) = \dim(\ker(A'^2)) = 2 \Rightarrow p = 2$
 $\Rightarrow$ Länge von J_j ist 2 ($\exists!$ J_j für EW λ_1 , hier).

(ii) Nehme ein Vektor $v_1 \in \ker(A'^p) \setminus v_1 \notin \ker(A'^{p-1})$, berechne $A'^{p-1} v_1, \dots, A' v_1$. Definiere Basis B_1 .
 $B_1 = \{A'^{p-1} v_1, \dots, A' v_1, v_1\}$. Also $B_1 = \{A' v_1, v_1\} = \{ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, e_1 \}$.

(iii) Nun wiederhole die obigen Schritte für λ_2 .
 $\ker(A') = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \rangle, \ker(A'^2) = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$;
 $\ker(A'^3) = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \rangle$; setze $v_2 = e_3$.
 $B_2 = \{A'^2 v_2, A' v_2, v_2\} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, e_3 \rangle$.

(iv) Die endgültige Basis ist $B = \{B_1, B_2\} = \{T_1, T_2\}$.
 $\Rightarrow \text{JNF}(A) = T^{-1} A T = J, \text{JNF}(A) = \text{diag}(C_1, C_2)$
 $C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Die Singulärwertzerlegung (SVD)

Beachte auch Blatt 5 & Prop. (S11.1a): Ges.: $A = V D U^T$; Geg.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) berechne zuerst D: $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\det(A^T A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-3)(\lambda-1)$
 $\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$
 $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) berechne U: EV λ_1 : $\ker(A^T A - 3I) = \dots = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow EV_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow EV_{\lambda_2}$: $\ker(A^T A - I) = \dots = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow EV_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A u_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit Gram-Schmidt zu ONB ergänzen:
 $\tilde{v}_3 = e_1 - \langle e_1, v_1 \rangle v_1 - \langle e_1, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_3$
 $\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A = V D U^T$ done!

Bem. 19: (aus Satz 11.1 (M.11c)) U & V sind ONB.

$A = V \Sigma U^H = \sum_{k=1}^r \tilde{u}_k \sigma_k \tilde{v}_k^H, A_j \in K^{m \times n}, U \in K^{m \times m}, V \in K^{n \times n}$
output space $\leftarrow U$ input space $\leftarrow V$

Bem. 20: (aus Satz 11.1 (M.11d)) Die Spalten von V & U bilden orthonormale Eigenbasen von $A A^H$ bzw. $A^H A$. (i) $A A^H = V \Sigma_m^2 V^H$, (ii) $A^H A = U \Sigma_n^2 U^H$ mit $\Sigma_m := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $\Sigma_n := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, wo $\sigma_k = 0$ falls $k > r$.

Bem. 21: (aus Satz 11.1 (M.11f)) Wir erhalten die vier fundamentalen Unterräume der Matrix A:
(i) $\{v_1, \dots, v_r\}$ ist Basis von $\text{im}(A)$
(ii) $\{u_1, \dots, u_r\}$ ist Basis von $\text{im}(A^H)$
(iii) $\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$ ist Basis von $\ker(A^H)$
(iv) $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ ist Basis von $\ker(A)$
wobei dies alle ONB's sind.

Def.: Die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ sind die linken Singulärvektoren und die $u_1, \dots, u_n$ sind die rechten.

Cor. 11.2: $A = V_r \Sigma_r U_r^H = \sum_{k=1}^r \tilde{v}_k \sigma_k \tilde{u}_k^H$ Kompakte Form

Bem. 22: $\text{im}(A) \perp \ker(A^H) \subseteq K^m$ & $\ker(A) \perp \text{im}(A^H) \subseteq K^n$

Cor. 11.4: Es sei $A \in K^{m \times n}$, $\text{Rang}(A) = r$. Dann sind die r pos. EW von $A^H A$ & $A A^H$ gleich, aber die Vielf. des EW's 0 ist $n-r$ bzw. $m-r$.

Cor. 11.5: Für die Spektralnorm einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1$. (*) Ist A regulär, so gilt für die (der Spektralnorm zugeordnete) Konditionzahl von $A \in K^{n \times n}$: $K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Bem. 23: (a) Goal: $\|A\|_2 = \sigma_1$. [für $x = e_1$].
 $\|A\|_2 = \|V \Sigma U^H\|_2 = \|\Sigma\|_2$, da U, V unitär & $\|x\|_2 = 1$
 $= \max_{\|x\|_2=1} (\sigma_1^2 x_1^2 + \dots + \sigma_n^2 x_n^2) \leq \sigma_1^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2) = \sigma_1^2$

Satz 11.6: Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ habe die SVD (mit $m=n$), und für $p=1, \dots, r$ sei $A_p = \sum_{k=1}^p \tilde{v}_k \sigma_k \tilde{u}_k^H$. Dann ist A_p im Sinne der Spektralnorm die beste Approx. von A durch eine Matrix vom Rang p, d.h. es gilt: $\|A - A_p\|_2 = \min \|A - B\|_2 \quad \forall B \in K^{n \times n}, \text{rk}(B) = p$ minimiert wird. Dabei ist $\|A - A_p\|_2 = \sigma_{p+1}$.

10. Anwendung der EW-Zerlegung

10.1 Hom. lin. DGL's mit konst. Koeffiz

Lösung mittels Exponentialmatrix (Michael):

Geg. sei ein lin. hom. $n \times n$ System von DGL 1. Ord. mit konst. Koeffiz.: $\dot{y} = Ay$. Die allg. Lsg ist (i) Ellipse mit Halbachsen ab: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ geg. durch $y(x) = e^{Ax} \vec{c}$, wobei $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ ein Vektor ist, der die Integrationskonst. enthält. Die Halbachse a & Asymptotensteigung $\pm \arctan(\frac{b}{a})$. Konst. $c_1, \dots, c_n$ werden aus den Anfangsbeding. bestimmt. Für den Spezialfall $\dot{y} = Ay, y(0) = y_0$ ist $y(x) = e^{Ax} y_0$ die Lsg. e^{Ax} = Fundamentalmat. $p: x_1^2 - 2px + x_2^2 = 0$

Bsp. (Michael): $\dot{y}_1 = 3y_1 - 2y_2, \dot{y}_2 = 2y_1 - y_2, y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$. BLF & Sequenzform: siehe Blatt 5.
Lsg: zu lösen: $\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y = Ay$. Die Lsg ist geg. durch $y(x) = e^{Ax} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne e^{Ax} , indem wir A diagonalisieren. EWs: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. EVs: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. mit einer hermiteschen $n \times n$ -Matrix A .
Es gilt also $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Somit gilt: $e^{Ax} = T e^{Dx} T^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^x + 2e^{4x} & 2e^x - 2e^{4x} \\ e^x - e^{4x} & 2e^x - e^{4x} \end{pmatrix}$
Die ges. Lsg ist: $y(x) = e^{Ax} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^x + 2e^{4x} \\ e^x - e^{4x} \end{pmatrix}$

Systeme höherer Ordnung: $x^{(n)}(t) - p_{n-1} x^{(n-1)}(t) - \dots - p_1 x'(t) - p_0 x(t) = 0$. Werte von Q ändern. (*: $\Lambda := \text{diag}(EW_1, \dots, EW_n)$)
Bsp. (10.2): Geg.: $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0, x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0$. Wir setzen $y_1(t) := x(t), y_2(t) := \dot{x}(t)$ & erhalten so das ANP 1. Ord. $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = 2y_1 + y_2$ mit $y_1(0) = x(0) = 3$ d.h. $\exists$ Basistrafo von A : $A = T_K^E \Lambda (T_K^E)^T, \vec{x} := (T_K^E)^T x$
 $y_2(0) = \dot{x}(0) = 0$. Also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Rest wie oben. $Q(x) = x^T A x = x^T T_K^E \Lambda (T_K^E)^T x = \vec{x}^T \Lambda \vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{x}_k^2$. (* *)

Sys. 2. Ord. ohne Term 1. Ord.: Ann.: A diag'bar, EWs < 0 . Wir erhalten das Sys.: $\ddot{z}(t) = \Lambda z(t)$.
Diag'matrizen: (i) $\Omega := \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i := \sqrt{-\lambda_i}, \lambda_i < 0$.
(ii) $\cos(\Omega t) := \text{diag}(\cos(\omega_1 t), \dots, \cos(\omega_n t))$.
(iii) $\sin(\Omega t) := \text{diag}(\sin(\omega_1 t), \dots, \sin(\omega_n t))$.
Ansatz: $y(t) = T_K^E z(t) = T_K^E (\cos(\Omega t) \vec{a} + \sin(\Omega t) \vec{b})$.
mit $\vec{a} = (T_K^E)^{-1} y_0 = T_K^E y_0, \vec{b} = \Omega^{-1} (T_K^E)^{-1} \dot{y}_0 = \Omega^{-1} T_K^E \dot{y}_0$.
 $T_K^E = (EV_1, \dots, EV_n), \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, K_2^{-1} = 2K_2^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

Bem. 24: $K_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, K_2^{-1} = 2K_2^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.
Satz 10.1: Die reelle Matrix A hat den komplexen EW λ & den zugehörigen EV v . Dann ist $\bar{v}$ ein EV zu $\bar{\lambda}$ und $r = \text{Rang}(A)$, d.h. $r-p = \#EW < 0$ von A .
und es gilt Bem. 24: $(\text{Re}(v) \text{ Im}(v)) = (\text{Re}(v) \text{ Im}(v)) \begin{pmatrix} \text{Re}(\lambda) & \text{Im}(\lambda) \\ -\text{Im}(\lambda) & \text{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$.

10.3 Reelle lin. DGL's mit komplexen EW

Bem. 25: $K := \begin{pmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-2} \end{pmatrix}$. Ansatz: $y(t) = \begin{pmatrix} T_K^E K \\ T_K^E \end{pmatrix} z(t)$
 $y_0 = (VK)(K^{-1}c)$, mit $(VK) \in \mathbb{R}^n$ & $(K^{-1}c) \in \mathbb{R}^n$.

10.4 Quadr. Formen & ihre Hauptachsentransfo

Bem. 26: (Kegelschnitte)
(i) Ellipse mit Halbachsen ab: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$
(ii) nach links & rechts geöffnete Hyperbel mit reeller Asymptotensteigung $\pm \arctan(\frac{b}{a})$: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.
(iii) nach oben geöffnete Parabel mit Halbparameter p : $x_1^2 - 2px + x_2^2 = 0$
Def.: Eine auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ definierte hermitesche BLF B ist eine Abb.: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto B(x, y) = B(y, x) = x^H A y$ mit einer hermiteschen $n \times n$ -Matrix A .

Bem. 27: Definiert man $Q(x) := x^T B x$ mit einer unsymm. Matrix B , so kann man diese durch die symm. Matrix $A := \frac{1}{2}(B + B^T)$ ersetzen, ohne dass die

Bem. 28: $Q(x) = x^T A x = \sum_{k,j=1}^n a_{kj} x_k x_j$.
Bem. 29 (Hauptachsentransfo): A ist symm./hermitesch, $A = T_K^E \Lambda (T_K^E)^T, \vec{x} := (T_K^E)^T x$
Bem. 30: Ellipsen & Hyperbeln ($n=2$) werden durch Gleichungen der Form $Q(x) = \text{konst.}$ dargestellt.

Satz 10.2 (Hauptachsentransfo): Jede quadr. Form $Q(x) = x^T A x$ lässt sich mittels einer auf der Spektralzerl. von A beruhenden orthon. Basistrafo auf die Hauptachsendarstellung (Bem. 23) bringen.

Kor. 10.3: Jede QF $Q(x) = x^T A x$ lässt sich durch Übergang auf eine neue orthogonale Basis mit Koord. y auf die folgende Form bringen: $Q(x) = y^T \Lambda y = \sum_{k=1}^r \lambda_k y_k^2 - \sum_{k=r+1}^n y_k^2$. Die Zahl p ist $\#EW > 0$ von A .

Bem. 31 (Ergänzung zu Bem. 23): T_K^E beruht auf normierten EV von A , s.d. gilt: $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ bzgl. Std-SP, λ_i EW von A .

Def.: Das Tripel $(p, r-p, n-r)$ aus Kor. 10.3 mit $p = \#EW > 0, r-p = \#EW < 0, n-r = \#EW = 0$ v. A heißt Trägheit. Die Differenz $p - (r-p)$ heißt Signatur von A .

Bem. 32: $D := \text{diag}(\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, \sqrt{|\lambda_n|}), \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $S := T_K^E D, \vec{x} := y$. Damit lässt sich die Trafo von Q wie folgt zusammenfassen: $Q(x) = x^T A x = x^T T_K^E \Lambda (T_K^E)^T x = x^T T_K^E D \Lambda D (T_K^E)^T x = x^T S \Lambda S^T x = y^T \Lambda y$.

Def.: $A, B \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ heißen kongruent, wenn es eine reguläre Matrix S gibt, s.d. $A = S B S^T$. Der Übergang $B \mapsto A = S B S^T$ heißt dann Kongruenztrafo (aka BLF Basiswechsel, siehe auch Bl. 5).

Satz 10.4: Zu jeder reellen symm. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine kongruente Matrix Λ . Dabei ist das Tripel $(p, r-p, n-r)$ die Trägheit von A , die unabh. ist von der K.-trafo.

10.6 Die Spektralnrm

Satz 10.7: Die Spektralnrm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\|A\|_2 = \max \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A^H A \}$.

Satz 10.8: Die Spektralnrm einer hermiteschen (or reell symm.) Matrix ist: $\|A\|_2 = \max \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A \}$.

Satz 10.9: Die Spektralnrm der Inversen A^{-1} einer Matrix ist: $\|A^{-1}\|_2 = \max \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A^H A \}$.
Ist A herm. (or reell symm.), so ist $\|A^{-1}\|_2$ gleich: $\|A^{-1}\|_2 = \max \{ \frac{1}{|\omega|} \mid \omega \text{ EW von } A \}$.

Bem. 33: (2-Norm-Kond.zahl) $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Kor. 10.10: Die 2-Norm-Kond.zahl einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist: $K_2(A) = \frac{\max \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A^H A \}}{\min \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A^H A \}}$.
Ist A herm. (or reell symm.), so ist vereinfacht: $K_2(A) = \frac{\max \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A \}}{\min \{ |\omega| \mid \omega \text{ EW von } A \}}$. Insbesondere ist die Kond.zahl immer $K_2(A) \geq 1$.