

Kapitel 1 & 2: Die reellen Zahlen Relationen

Def.: (Äquivalenzrelation)

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation zwischen X und X mit den Eigenschaften:

- (i) $\forall x \in X: x \sim x$ (Reflexivität)
- (ii) $\forall x, y \in X: x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (Symmetrie)
- (iii) $\forall x, y, z \in X: x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Def.: (Äquivalenzklasse)

Die Äquivalenzklasse eines Elements x ist die Menge aller äquivalenter Elemente:

$$[x]_{\sim} := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

x heißt dann auch Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]_{\sim}$.

Satz

Es gilt: $x \sim y \Leftrightarrow [x]_{\sim} = [y]_{\sim}$
 $x \not\sim y \Leftrightarrow [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$

Def.: (Ordnungsrelation)

Eine Ordnungsrelation ist eine Relation $\leq$ zwischen X mit den Eigenschaften:

- (i) $\forall x \in X: x \leq x$ (Reflexivität)
- (ii) $\forall x, y \in X: x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisym.)
- (iii) $\forall x, y, z \in X: x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

X heißt linear geordnet, falls $\forall x, y \in X: x \leq y \vee y \leq x$.

Satz

Die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit der Ordnungsrelation $\leq$ ist wohlgeordnet.

Bem.: (Cauchy-Schwarz) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$
 mit Gleichheit $\Leftrightarrow v$ & w lin. abh.

Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

- Eine Fkt $f: X \rightarrow Y$ ist inj. falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$
- Eine Fkt $f: X \rightarrow Y$ ist surj. falls $\forall y \in Y \exists x \in X$ s.d. $f(x) = y$
- Bijektiv $\Leftrightarrow$ inj. + surj.
- ~ Wenn $f: X \rightarrow Y$ bijektiv, dann ist $f^{-1}: Y \rightarrow X$ die Umkehrabb. die $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ erfüllt.

Definition: Min, Max, sup, inf

- $X \subseteq \mathbb{R} a = \max(X) \Leftrightarrow a \in X \wedge \forall x \in X, x \leq a$
- $X \subseteq \mathbb{R} a = \sup(X) \Leftrightarrow \forall x \in X, x \leq a \wedge \forall \epsilon > 0 \exists y \in X (y > a - \epsilon)$
- min, inf analog zu max, sup.

Sätze & Prinzipien zu reellen Zahlen

Vollständigkeitsaxiome

Falls $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmenge und $\forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y$, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ s.d. $x \leq c \leq y$.

Archimedisches Prinzip

Zu jeder positiven Zahl h und jede Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl k mit $(k-1)h \leq x \leq kh$.

Δ -Ungleichung

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{Zusatz: } |a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

$$|a-b| \geq ||a| - |b||$$

Intervallschachtelungsprinzip (Cauchy-Cantor)

Seien $I_1, I_2, \dots$ eine Folge abgeschl. nicht-leerer, beschr. Intervalle. Ang. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \dots$
 $\Rightarrow$ Dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ nichtleer und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ enthält genau einen Punkt.

Satz (Heine-Borel)

Jede Überdeckung von einem abgeschl. beschr. Intervall, die aus offenen Intervallen besteht, besitzt eine endl. Teilüberdeckung.

Satz von HP (Bolzano-Weierstrass)

Jede unendl. beschr. Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat einen HP in $\mathbb{R}$.

Binomialkoeffizienten

$$\text{Def.: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Kapitel 3: Folgen, Reihen, Grenzwert

Def.: Folgen

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Folge
- Sei x_n eine Folge $\in \mathbb{R}$. Dann ist A der Grenzwert von x_n falls $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n > N, |x_n - A| < \epsilon$
- Eine Folge heißt beschr. falls $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$
 $\rightarrow$ falls x_n -konv. ist, dann ist sie auch beschr.
- Sei x_n eine Folge und sei $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$ eine streng monotone wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$
- Eine Folge x_n heißt Cauchy-Folge falls $\forall \epsilon > 0 \exists N, \forall m, n > N: |x_m - x_n| < \epsilon$
- Sei x_n eine Folge. Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, falls $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, x_n > M$ (Divergenz)
- Sei x_n eine beschr. Folge. Dann definieren wir:
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k)$ (lim. inferior)
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k)$ (lim. superior)

Sätze zur Konvergenz zu den Folgen

- Satz von Weierstrass: Eine monotone Folge ist konvergent $\Leftrightarrow$ sie beschr. ist.
- Cauchy-Krit.: Eine Folge x_n konvergiert $\Leftrightarrow$ sie eine Cauchy-Folge ist.
- Satz: Sei x_n beschr. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = A$

Rechenregeln

$(a_n)_n, (b_n)_n$ mit $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B$
 $\Rightarrow a_n \pm b_n \rightarrow A \pm B, a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$
 $\Rightarrow a_n / b_n \rightarrow A/B, a_n^{b_n} \rightarrow A^B, A, B \neq 0$
 für stetiges $f: \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(A)$

$$\frac{1}{x} < \log(x) < x$$

Grenzwerte von Funktionen

-Definition:

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge. Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt. Sei a ein HP von E . Wir definieren den Limes von f für $x \rightarrow a$ geschrieben als: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ als einen Wert $A \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E, x \neq a \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \epsilon$

Methoden zur Grenzwertberechnung

• Dominanzen (für $n \rightarrow \infty$)

$1 \leq \ln(n) \leq n^a (a > 0) \leq q^n (q > 1) \leq n! \leq n^n$
wobei $\ln(n) < n^{1/2}$

Squeeze Theorem ("Sandwich")

Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ mit $\lim a_n = \lim c_n = A$
 $\Rightarrow \lim b_n = A$

Bernoulli de l'Hospital

Für $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ kann man die Regel von BdlH benutzen: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$

Struwe: (Bernoulli de l'Hospital)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & diff'bar in $]a, b[$ mit $g'(x) \neq 0$ für jeden $x \in]a, b[$.

Weiter gelte $f(a) = 0 = g(a)$, und es existiere der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) =: A$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > a$, und es gilt: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A$

Beweis:

i) Falls $g(x) = 0$ für ein $x > a$, so gibt es nach MWS ein $x_0 \in]a, x[$ mit $g'(x_0) = 0$ im Widerspruch zu unserer Ann.

ii) Für festes $s > a$ betrachte die Fkt: $h(x) = f(s)/g(s) \cdot g(x) - f(x)$, $x \in [a, s]$
Die Fkt $h: [a, s] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und diff'bar in $]a, s[$ mit $h(a) = 0 = h(s)$.
Nach MWS gibt es $x = x(s) \in]a, s[$ mit $0 = h'(x) = f(s)/g(s) \cdot g'(x) - f'(x)$, d.h. $f(s)/g(s) = f'(x)/g'(x)$. Mit $s \rightarrow a$ folgt

dann $x(s) \rightarrow a$, und

$$f(s)/g(s) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = A \quad \square$$

Tricks: Grenzwerte

Fkt	$\lim_{x \rightarrow x_0}$	Umformungen
$u(x)v(x)$	" $\infty \cdot 0$ " " $0 \cdot \infty$ "	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$u(x)-v(x)$	" $\infty - \infty$ "	$\left(\frac{1}{\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)}}\right) \cdot \left(\frac{1}{u(x)v(x)}\right)$
$u(x)^{v(x)}$	" 0^0 ", " ∞^0 ", " $1/\infty$ "	$e^{v(x) \ln(u(x))}$

Landau Symbole (für $x \rightarrow a$)

- $f = o(g)$ falls $\lim_{x \rightarrow a} f/g = 0$
- $f = O(g)$ falls $\lim_{x \rightarrow a} |f/g| = k \in \mathbb{R}_+$
- $f \sim g$ falls $\lim_{x \rightarrow a} f/g = 1$

Taylor

Vor allem bei trig. Fkt sowie bei ln kann man mit einer Taylorentw. (meist reicht 2.-3. Grad) den Grenzwert vereinfachen.

$$\text{Allg. } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Weitere Tricks

- Substitution: $t = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-2x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0} (1-\frac{2}{t})^t = e^{-2}$
- Bei "Fkt hoch Fkt" hilft vielfach $x = e^{\ln(x)}$
- Bei Wurzeln: Mit "konjugierter Wurzel" erweitern.

• Primfaktorzerlegung also Ausklammern:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 7x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(2x+3)}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{7}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3}{\tan(x) \log(1+\sin(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x)+3)(\cos(x)-1)}{\tan(x) \log(1+\sin(x))}$$

• Gesuchten Grenzwert auf bekannte Grenzwerte (unten) zurückführen.

Wichtige Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln(a)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln(a)} & \lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln(x) &= 0, a > 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^n(f(x))}{f(x)^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^n(f(x))}{f(x)^n} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{f(x)})^{f(x)} &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{-f(x)} = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (1 \pm \frac{x}{n})^n &= e^{\pm x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) &= \ln(a), a > 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)/n^a = 0, a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} &= \infty \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0, a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x) &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \arccos(x) = \pi/2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) = \pi/2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos(x)} &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log(|x|) &= -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} n(1 - \log(\log(n))) &= -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(\frac{1}{x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sinh(\frac{1}{x}) &= -\infty \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \sinh(\frac{1}{x}) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cosh(\frac{1}{x}) &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cosh(\frac{1}{x}) = \infty \end{aligned}$$

Teilfolgen (siehe auch (*) auf (1))

$(a_n)_n$ Folge: Wir können die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ betrachten wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$, $|k| = |n|$ (d.h. abzählbar) $(n, 2k=n)$ even $(n, 2k+1, k \in \mathbb{N}_0)$ odd

Rekursive Folgen

Falls die Folge rekursiv definiert ist, d.h. $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Startwert a_0 , nimm an: $\exists \lim a_n =: a$ und löse $f(a) = a$ (Fixptgl.) nach a auf. Zeige

damach, dass die Folge monoton und beschr. ist

$$a_n = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \Rightarrow A = \sqrt{1+A} \Leftrightarrow A^2 - A - 1 = 0 \Leftrightarrow A \pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

wobei wir A ausschliessen. Begründen! weiter ist z.z. dass:

- Folge monoton wächst, $[f'(x) \geq 0$ monoton steig./fallend]
- Folge beschr. ist.

Beide Pkte Induktionsbew.

$$n=1: \checkmark$$

$$n \rightarrow n+1: a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < 2 \quad \square$$

(*) Satz 7.4.1: Sei $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton fallend. Dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ konv. und in diesem Fall gilt: $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$.

$\cdot \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
 $\cdot \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
 $\cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Def.: Reihen

- Sei a_n eine Folge, dann nennen wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.
- Die Partialsummen einer Reihe sind gegeben durch: $\sum_{n=1}^k a_n = S_k \in \mathbb{R}$
- Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.
- Falls die Reihe konv., aber nicht absolut, dann ist sie bedingt konverg.

Bem.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Konvergenzkrit. für Reihen

- Cauchy-Krit.: Eine Reihe konv. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $m \geq n > N: |\sum_{k=n}^m a_k| < \epsilon$
- Vergleichssatz:
Ang. $a_n \geq 0, b_n \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $a_n \leq b_n \forall n \geq N$.
Dann gilt:
a) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., dann konv. auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
b) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div., dann div. auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

- Majoranten-Krit.:

Ang. a_n, b_n sind Folgen, $b_n \geq 0, |a_n| \leq b_n$ für $n > N$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (konv. absolut)

- Wurzelkrit.: (für Potenzen)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und sei $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, dann gilt: (i) $\alpha < 1 \Rightarrow$ konv. (ii) $\alpha > 1 \Rightarrow$ div. (iii) $\alpha = 1 \Rightarrow$ keine Info

- Quotientenkrit.: (für Fakultäten)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ und sei $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$, dann gilt: (i) $\alpha < 1 \Rightarrow$ konv. (ii) $\alpha > 1 \Rightarrow$ div. (iii) $\alpha = 1 \Rightarrow$ keine Info
mit Quot.krit.: $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty > 1$

- Leibnizkrit.:

Sei a_n eine monoton fallende Nullfolge, dann konv. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. [monotonie mit Ableitung testen: $f(x)$ streng monoton steigend/fallend]

- Taylorentwicklung:

Bei simplen Termen kann sich eine Taylorentw. von a_n lohnen.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^4}) \Rightarrow$ konv.

- Verdichtungsatz (Cauchy):

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots < \infty$
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log_2(n))} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n \log_2(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log_2(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n \log_2(n)}} \Rightarrow$ harm. Reihe $\Rightarrow$ div.

- Integralkrit.: (*) (*)

Sei $p \in \mathbb{Z}$ für $[p, \infty) \rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend, dann gilt: $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ ist konv. $\Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x) dx < \infty$

Korollar

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konv. Reihe. Dann gilt: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$

- Reihen berechnen

• Geom. Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$
absolut konv. (Sei $k \in \mathbb{N}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = (1-2^k)/(1-2)$)

• Riemann-Summen:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x) dx$
Manchmal kann man Taylor-Reihen von bekannten Fkten erkennen oder bei Brüchen nach Partialbruchsummen kürzen.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$

Wichtige Reihen

- $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konv. $\Leftrightarrow s > 1$ (harm. Reihe)
- Arithmetische Reihe: $(a_{n+1} - a_n) = d \in \mathbb{R}$
 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$ • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ • $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ • $\sum_{k=1}^n 2k-1 = n^2$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ • $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$

Def.: Potenzreihe

Reihen der Form $P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ nennt man Potenzreihen um x_0 ($a_n \neq a_n(x)$). Die Reihe konv. (1) nur im Pkt. (2) im Intervall (x_0-r, x_0+r) $r =$ Konv'radius (3) auf ganz $\mathbb{R}$. Die Potenz. konv. abs. im r.
• keine Aussage auf dem Rand des Konv'radius $\rightarrow$ betrachte Randpkt., d.h. setze $|x|$ ein.
• Konv'radius berechnen:

- (a) $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Wurzelkrit.)
- (b) $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (Quotientenkrit.)

Kapitel 4: stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

Def.: $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in $x_0 \in \Omega$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (in alle Richtungen).

Def.: f stetig in $x_0 \in \Omega \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Sätze:

- Weierstraskrit.: f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$
- Folgekrit.: $\Leftrightarrow \forall (x_n)_n: x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
- Topol.krit.: $\Leftrightarrow \forall$ Umgebung U von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in U\}$.

$\rightarrow$ stetige Fkten erhalten die Topologie!

Exkurs: Metrischer Raum, (X, d)

- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
- (i) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- (ii) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ Symmetrie
- (iii) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ Δ -Ungl.

Bem.: $x_2 = x_1$ in (iii) $\Rightarrow d(x_1, x_2) \geq 0$

Definitionen (statti):

- Stetigkeit
 $\forall x_0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0$ s.d. $\forall x \in X: d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$
stetig in allen Pkten.

Eine diff'bare Fkt $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a,b) \in \mathbb{R}$ ist L -stetig $\Leftrightarrow$
 erste Ableitung beschr.

- Glm Stetigkeit $d_x(x_0, x) < \delta(\epsilon)$
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ s.d. $\forall x \in X: \Rightarrow d_y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$
- lokal Lipschitz stetig
 $\forall x_0 \in \Omega \exists \epsilon > 0 \exists L > 0$ s.d. $\forall x, y \in B_\epsilon(x_0)$:
 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
- Lipschitz stetig
 $\forall x, y \in X \exists L > 0$ s.d. $d_y(f(x_0), f(x)) \leq L d_x(x_0, x)$

(Lipschitz $\Rightarrow$ lokal Lipschitz $\Rightarrow$ stetig)
 (Lipschitz $\Rightarrow$ glm stetig $\Rightarrow$ stetig)
 (beschr. 2. Ableit.)

Wichtige Sätze
 • $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $K \subseteq \Omega$ kompakt
 $\Rightarrow f$ nimmt auf K Max. und Min. an.
 (= Weierstraßsche Extremwertatz)

• $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $f(\Omega)$ offen/kompakt/Zusammenh.
 $\Rightarrow \Omega$ offen/kompakt/Zusammenhängend.

• Zwischenwertsatz: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig,
 $f(a) < f(b) \Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)] \exists x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

• Eine Komposition stetiger Fkten ist wieder stetig!

• Extremalsatz von Weierstraß:
 Sei $I = [a,b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und $\exists x \in I$ s.d. $f(x) = \max f(t)$

• Satz von Heine zur glm Stetigkeit:
 Sei $I = [a,b]$ abg. und beschr. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f glm stetig.

Exponentialfkt
 Def.: $\exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

• exp ist monoton wachsend $\Rightarrow \exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$

Logarithmusfkt
 Def.: $\exp^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} := \ln$

• Eigenschaften: $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$, $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
 • $\ln(a^x) = x \ln(a)$, $\ln(u) + \ln(v) = \ln(u \cdot v)$
 • $\ln(u) - \ln(v) = \ln(\frac{u}{v})$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
 • $\ln(\sqrt[n]{x}) = \ln(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(x)$

Trigonometrische Fkten
 $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

$$\begin{aligned}
 \cos(z) &= \operatorname{Re}(e^{iz}) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \dots \\
 \sin(z) &= \operatorname{Im}(e^{iz}) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots \\
 \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
 \end{aligned}$$

Definition:
 • $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ • $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

• log als Potenzreihe:
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
 • andere Fkt als Potenzreihe:

• $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ für $|x| \leq 1$
 • $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4n(n!)^2(2n+1))} x^{2n+1}$, $|x| < 1$

Def.: Folgen von Funktionen
 Seien $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Fkten.

• Falls $\forall x \in \Omega: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ existiert
 $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pkt}} f$, pktweise Konvergenz

• Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$,
gleichmäßige Konv.

In ϵ -Notation:
 • Pktw. Konv.: ($f_n \rightarrow f$ auf X)
 $\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

• Glm. Konv.: ($f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ auf X)
 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in X$ s.d. $\forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Weitere Notation:
 • Pktw. Konv.: ($f_n \rightarrow f$ auf X) $\Leftrightarrow$
 $\forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• Glm. Konv.: ($f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ auf X) $\Leftrightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Es gilt folgendes:
 • Potenzreihen Konv. immer glm innerhalb
 vom Konv. radius.

• Glm Konv. $\Rightarrow$ pktw. Konv.

Satz von Dini
 Sei f_n stetig auf Ω $\forall n$.
 $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f \Rightarrow f$ stetig

Anwendung: f nicht stetig $\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\text{glm}} f$

"Vertauschbarkeit"

• von Limes und Integral (Summe):
 $\Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 $\rightarrow$ wir müssen also glm. konv. fordern, um
 Vertauschbarkeit zu erlangen.

• von Limes und Ableitungen:
 • Hier reicht glm. konv. nicht aus:
 i.A. konv. die Folge der Ableitungen
 (f_n) nicht gegen f' , obwohl $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$.

Fordern darum zusätzlich:
 • f_n (mind.) konv. mind. pktw. gegen f'
 • $f_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$

$\Rightarrow f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$

Kapitel 6: Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Differenzieren: Definitionen
 • $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt diff'bar in $x_0 \in \Omega$, falls
 $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.
 Ist f diff'bar in x_0 , so ist f auch stetig in x_0 .

Differenzieren: Sätze

• Mittelwertsatz: Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & diff'bar
 in $[a,b]$. $\Rightarrow \exists \xi \in]a,b[$: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (Steigung der
 Sekante)

• Umkehrsatz: Sei $\Omega =]a,b[$. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar
 mit $f'(x) > 0$ auf Ω . Dann ist $f: \Omega \rightarrow]\inf f(x), \sup f(x)[$ bij.
 und $f^{-1}:]\inf f(x), \sup f(x)[\rightarrow \Omega$ ist diff'bar mit der Formel:
 $\forall y \in]\inf f(x), \sup f(x)[: (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$ für $f(x_0) = y$ also $x_0 = f^{-1}(y)$

• Konvexität/Konkavität: Sei $f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff'bar.
 (1) f konvex: $\Leftrightarrow \forall x \in]a,b[: f''(x) \geq 0$
 (2) f konkav: $\Leftrightarrow \forall x \in]a,b[: f''(x) \leq 0$

• Extremalstellen finden: Sei $f'(x_0) = 0$, also x_0 ein kritischer Pkt.
 (1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min. (2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max.
 (3) $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ Wendepkt

Differenzieren: Höhere Ableitungen

• f heißt auf Ω m -mal diff'bar, falls f $(m-1)$ -mal diff'bar
 ist mit diff'barer $(m-1)$ -ter Ableitung.
 • $f \in C^m(\Omega)$, falls f m -mal diff'bar und $f^{(0)}, \dots, f^{(m)}$ stetig.

(*) $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} \Leftrightarrow f'(a) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(a))}$

$$(*) : \ln(k + \frac{1}{2}) \rightarrow T_k(x; x_0) \quad \Delta$$

$$k + \frac{1}{2} \quad k$$

falls keine Stammfkt schätze ab und
benutze Integralkrit. (mit Riemann-Reihen)

(3)

• f heißt glatt, falls $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

• $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heißt analytisch, falls f in allen Pkten $x_0 \in \mathbb{R}$ durch Taylorreihe dargestellt werden kann.

Taylorentwicklung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genügend oft diff'bar.

Formale Potenzreihe: $T_k(x; x_0) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

↳ Reihenentwicklung um x_0 .

Restglieddarstellung: $T_k^n(x; x_0) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + O((x-x_0)^{k+1})$

Lagrange: $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$

Cauchy: $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-\xi)^k (x-x_0)$

Differenzieren: Rechenregeln

(1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$ (2) $(cf)' = cf'$ (3) $(fg)' = f'g + fg'$

(4) $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (5) $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

$f(x)$ $f'(x)$ $f(x)$ $f'(x)$

c	0	$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$c \cdot x$	c	$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-1/(1+x^2)$
e^{cx}	ce^{cx}	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\ln x $	$1/x$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\log_a x $	$1/(x \ln(a))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\coth(x)$	$\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot c \cdot \ln(a)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$1/\sqrt{1+x^2}$
a^{-x}	$-a^{-x} \cdot \ln(a)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$	$1/(1-x^2)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$-1/(x^2-1)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)} = -(1 + \coth^2(x))$

Taylorentwicklungen um $x_0 = 0$

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$
$\arcsin(x)$	$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$
$(1+x)^a$	$1 + ax$

$\cosh(x)$

$\sinh(x)$

$1/(1+x^2)$

$1/(1+x^2)^2$

$1/(1+x^2)^3$

$1/(1+x^2)^4$

$1/(1+x^2)^5$

$1/(1+x^2)^6$

$1/(1+x^2)^7$

$1/(1+x^2)^8$

$1/(1+x^2)^9$

$1/(1+x^2)^{10}$

$1/(1+x^2)^{11}$

$1/(1+x^2)^{12}$

$1/(1+x^2)^{13}$

$1/(1+x^2)^{14}$

$1/(1+x^2)^{15}$

$1/(1+x^2)^{16}$

$1/(1+x^2)^{17}$

$1/(1+x^2)^{18}$

$1/(1+x^2)^{19}$

$1/(1+x^2)^{20}$

$1/(1+x^2)^{21}$

$1/(1+x^2)^{22}$

$1/(1+x^2)^{23}$

$1/(1+x^2)^{24}$

$1/(1+x^2)^{25}$

$1/(1+x^2)^{26}$

$1/(1+x^2)^{27}$

$1/(1+x^2)^{28}$

$1/(1+x^2)^{29}$

$1/(1+x^2)^{30}$

$1/(1+x^2)^{31}$

$1/(1+x^2)^{32}$

$1/(1+x^2)^{33}$

$1/(1+x^2)^{34}$

$1/(1+x^2)^{35}$

Kapitel 7: Integralrechnung

Integral: Definitionen

• $\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi = F(x) - F(x_0)$ heißt das Integral von f über $[x_0, x]$, wobei $\frac{dF}{dx} = f$ als Stammfkt F hat.

• f heißt über $[a, b]$ R-Integrierbar falls

$A := \int_a^b f(x) dx = \sup \int_a^b f(x) dx \leq \inf \int_a^b f(x) dx$

f monoton $\Rightarrow f$ R-Integrierbar $\Leftarrow f$ stetig

$\Leftarrow$ beschränkt

• Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n}$ mit Riemann

Integral: Eigenschaften & Abschätzungen

• Linearität: $\int (af + bg) dx = a \int f dx + b \int g dx$

• Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

• Gebietsadditivität: $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx$

• Abschätzung: $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

• $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ und $\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)$

Integral: Sätze

• Vergleichskriterium:

(1) Sei auf $[a, b]$ $|f(x)| < g(x)$ und es existiere $\int_a^b g(x) dx$, so

ist f integrierbar (das unendliche Integral konvergiert).

(2) Sei auf $[a, b]$ $0 < g(x) < f(x)$ und divergiere $\int_a^b g(x) dx$, dann

divergiert auch $\int_a^b f(x) dx$.

• Mittelwertsatz: Sei $a < b$, f R-Integrierbar auf $[a, b]$

(1) $(b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

(2) $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

Integral: Uneigentliche Integrale

↳ Intervallenden unbeschränkt oder fkt da nicht definiert.

mehrere Stellen $\rightarrow$ Integral zerlegen.

• $\int_a^b f(x) dx$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow b} \int_a^z f(x) dx$ existiert (Gleichsetzen)

Absolute Konv. $\Rightarrow$ Konvergenz (Betragskriterium um $|f(x)|$)

Integral: Wichtige Integrale

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	$a \cdot x$	$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$1/x$	$\ln(x)$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \ln cx+d $
$1/((x-a)(x-b))$	$\frac{1}{a-b} \ln \left \frac{x-a}{x-b} \right $	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $
$1/(x^2+a^2)$	$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
e^x	e^x	$\log_a(x)$	$x(\log_a(x) - \log_a(e))$
a^x	$a^x / \ln(a)$	$x \ln(ax)$	$\frac{x}{a} (2 \ln(ax) - 1)$
$x e^{ax}$	$\frac{ax-1}{a^2} \cdot e^{ax}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\operatorname{arccot}(x)$	$x \cdot \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\ln \sin(x) $	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln \left \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \right $
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln \left \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right $
$\cot^2(x)$	$-\cot(x) - x$	$\frac{1}{1-\sin(x)}$	$\cos(x)/(1-\sin(x))$
$\frac{1}{1+\sin(x)}$	$-\cos(x)/(1+\sin(x))$	$\frac{1}{1-\cos(x)}$	$-\sin(x)/(1-\cos(x))$
$\frac{1}{1+\cos(x)}$	$\sin(x)/(1+\cos(x))$	$e^{ax} \sin(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx))$
$x \sin(ax)$	$-\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{\sin(ax)}{a^2}$	$e^{ax} \cos(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx))$
$x \cos(ax)$	$\frac{x}{a} \sin(ax) + \frac{\cos(ax)}{a^2}$	$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln x+\sqrt{x^2+a^2} $
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$	$\sqrt{r^2-x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin(\frac{x}{r})$
$1/x^n$	$-1/((n-1)x^{n-1})$	$1/\sqrt{x^2+a^2}$	$\ln x+\sqrt{x^2+a^2} $
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$1/\sqrt{r^2-x^2}$	$\arcsin(\frac{x}{r})$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\ln(\cosh(x))$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$	
$\ln(\sinh(x))$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln 1-x^2 $	
$\coth(x)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x \operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2} \ln x^2-1 $	

Integral: Techniken

• Rationale Fkt $\frac{p(x)}{q(x)}$ $\rightarrow$ PBZ:

- (1) Polynomdivision, falls $\deg(p) \geq \deg(q) \rightarrow \frac{p}{q} = r + \frac{\tilde{p}}{q}$.
 (2) NST von q finden. (3) Faktorisieren q .
 (4) Ansatz. (5) Koeff.vergleich

Ansätze:

$$\frac{p}{q} = \frac{A_0}{(x-x_0)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)} + \dots + B_1 \left(\begin{array}{l} \text{einfache} \\ \text{NST} \end{array} \right) + \dots + \frac{B_k}{(x-x_k)^k} + \dots \left(\begin{array}{l} \text{mehrfach} \\ \text{NST} \end{array} \right) + \dots + \frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + a_1 x + b_1)} + \dots + \frac{C_k x + D_k}{(x^2 + a_k x + b_k)} + \dots \left(\begin{array}{l} \text{komplexe,} \\ \text{mehrfache} \\ \text{NST} \end{array} \right)$$

• Partielle Integration (PI)

$$\Leftrightarrow \int_a^b u v' dt = u v \Big|_a^b - \int_a^b u' v dt$$

integriere: 1. leite ab: $x^n, \ln(x), \arctan, \arcsin$

locke (+): $e^x, \sin, \cos, \sinh, \cosh$

• Direkte Integrale

$$\text{Prinzip: } \int f(g(x)) g'(x) dx = \int (f \circ g)' dx = f(g(x)) + C$$

Integral: Substitutionen

• $e^x, \sinh(x), \cosh(x)$

$$\text{subst.: } t = e^x, dx = \frac{dt}{t}, \sinh(x) = \frac{t^2 - 1}{2t}, \cosh(x) = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

• $\ln(x)$

$$\text{subst.: } t = \ln(x), x = e^t, dx = e^t dt$$

• $\sqrt{ax+b}$, subst. die Wurzel (am besten im Nenner)

$$\sqrt{x}, \sqrt{x+1} \rightarrow t = \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x+1} \rightarrow t = \sqrt[3]{x}$$

$$\cos^2(x), \sin^2(x), \dots, \tan(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{subst.: } t = \tan(x), dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right.$$

$$\cos(x), \sin(x), \cos^3(x), \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right.$$

$$\text{subst.: } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right.$$

• $\sqrt{ax^2+bx+c}$ im Nenner

$$\text{quadratisch zu } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \arcsin(x) \\ \operatorname{arccosh}(x) \end{array} \right.$$

• $\sqrt{x^2+bx+c}$ im Zähler

$$\text{benutze } \sin^2 + \cos^2 = 1 \text{ und } \cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx: \text{subst. } x = \sin(t), \cos(t)$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx: \text{subst. } x = \cosh(t)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx: \text{subst. } x = \sinh(t)$$

$$\sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \tan(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

$$\text{subst. } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \tan(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

• Gammafkt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re}(z) > 0$

Eigenschaften: (i) $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$. (ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$
 (iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \tan(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

$$\text{subst. } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \tan(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

$$\sqrt{b^2x^2-a^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t) dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

$$\text{subst. } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t) dt \text{ oder} \\ x = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t), dx = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t) dt \end{array} \right.$$

Integral: Rotationskörper

$$\text{Bogenlänge: } l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

$$\text{Volumen: } V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$\text{Mantelfläche: } M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

• Subst. formel: $x = \varphi(u)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Kapitel 8: Differentialgleichungen

• Def.: Eine DGL ist eine Gleichung $F(x, y(x), y'(x), \dots) = 0$

DGL: Lösungsmethoden

(1) DGL 1. Ordnung, homogen: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = g(y) h(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = h(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x) dx \xrightarrow{\int} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Randbedingungen bestimmen Integrationskonst. oder Integralgrenzen $\int_{y_0}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x h(x) dx$

(2) DGL 1. Ordnung, inhomogen: Variation der Konst.

$$y'(x) = g(y) h(x) + s(x) \quad \text{inhomogenität}$$

↳ finde $y_h(x) = c \cdot f(x)$ mit Separation der Variablen

↳ finde $y_p(x) = c(x) \cdot f(x)$ durch Einsetzen & Koeff. vgl.

$$\rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \rightarrow \text{ALLP}$$

(3) Lineare DGL n-ter Ordnung, homogen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Euler-Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \rightarrow$ char. Polynom

$\rightarrow$ NST $\rightarrow$ Logarithm $\rightarrow$ Superposition

$\rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k x} C_k, C_k$ aus Anfangsbedingungen

$\rightarrow$ mehrfache NST: $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_1 x}, m = \text{Vielfachheit}$

$\rightarrow$ komplexe NST: $\rightarrow$ auch komplex-konjugiert ist eine Lsg.

$$\rightarrow \text{benutze: } e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x) \text{ \& } e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin(x)$$

$$\Rightarrow \text{Ansatz } c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)$$

(4) Lineare DGL n-ter Ordnung, inhomogen

$\rightarrow$ finde $y_p(x)$ durch geeigneten Ansatz abhängig vom Störterm $g(x)$

Störfkt $g(x)$

Ansatz für $y_p(x)$

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r, b_i \in \mathbb{R}$$

$$A_0 + A_1 x + \dots + A_r x^r$$

$$a e^{ux}, u \in \mathbb{C}$$

$$A e^{ux}$$

$$a \sin(ux) + b \cos(ux)$$

$$A \sin(ux) + B \cos(ux)$$

$$P_n(x) e^{ux}$$

$$R_n(x) e^{ux}; R_n(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$$

$$a e^{ux} \sin(vx) + b e^{ux} \cos(vx)$$

$$e^{ux} (A \sin(vx) + B \cos(vx))$$

$$P_n(x) e^{ux} \sin(vx) + Q_n(x) e^{ux} \cos(vx)$$

$$e^{ux} [R_n(x) \sin(vx) + Q_n(x) \cos(vx)]$$

$$a \sinh(ux) + b \cosh(ux)$$

$$A \sinh(ux) + B \cosh(ux)$$

$$P_n(x) e^{ux} \sinh(vx) + Q_n(x) e^{ux} \cosh(vx)$$

$$e^{ux} [R_n(x) \sinh(vx) + Q_n(x) \cosh(vx)]$$

$$a \sinh(ux) + b \cosh(ux)$$

$$A \sinh(ux) + B \cosh(ux)$$

$$a \sinh(ux) + b \cosh(ux)$$

$$A \sinh(ux) + B \cosh(ux)$$

Kombinationen:

$$e^{ux} x + \cos(px)$$

$$(A+Bx) e^{ux} + C \cos(px) + D \sin(px)$$

Bem.: Falls der Ansatz gleich der Lsg. von $y_h(x)$

oder nach einsetzen sich gleich alle Terme

wegkürzen, dann muss man mit x multiplizieren

(5) Eulersche Differentialgleichung

$$\text{DGL: } ay + bx y' + cx^2 y'' + \dots = H_n(x) \quad \text{Polynom}$$

$\rightarrow$ homogen: Ansatz $y(x) = x^\lambda \rightarrow$ einsetzen $\rightarrow$ NST

$\rightarrow$ inhom./part.: als Ansatz Polynom vom Grad von $H_n(x)$

$$y' \text{ mit } \frac{b_0}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} y' + \frac{b_0}{x^n} y = 0$$

$\rightarrow$ inhomogen: Ansatz $y = x^\lambda$ mit Grad $H_n(x) + n$

(6) Riccati-Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x) y^2(x) + g(x) y(x) + u(x) \rightarrow \text{finde } y_p(x) \text{ mit raten}$$

Allg. Lsg.: Ansatz $y(x) = y_p(x) + u(x) \rightarrow u(x) = \dots \rightarrow u'(x) = \dots$

$\rightarrow$ neue DGL, einfacher zu lösen.

(7) Spezielle Substitutionen

(i) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ subst. $y(x) = u(x) x$, danach Separation d. Variablen

$$\text{Bsp.: } 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 1 \rightarrow u = \frac{y}{x}, u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}, y' = u'x + u$$

$$\rightarrow 2u'x + 2u = u^2 + 1$$

(ii) $y' = f(ax+by+c)$ subst. $u = ax+by+c \rightarrow$ Sep. d. Variablen

$$\text{Bsp.: } y' = (x+y-4)^2 \rightarrow u = x+y-4, y = u-x+4, y' = u'-1$$

$$\rightarrow u'-1 = u^2$$

(iii)-(iv) siehe Blatt ①

* ↑, stetig in Umgebung von x_0

(2)

(8) Diffgleichungen im $\mathbb{R}^n$

$F'(x) = AF(x)$ mit $\text{Log } F(x) = \text{Exp}(Ax) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} T^{-1}$

Bsp: $f' = 2f - g \rightarrow F' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} F$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

weiter geht's auf Blatt (8) DGL im $\mathbb{R}^n$

DGL: Wichtige Sätze

• **Picard-Lindelöf:** Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal bzgl. $u \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, glm in t .
 $\Rightarrow \forall u_0 \in \mathbb{R}^n: \exists T(u_0) > 0: \exists ! \text{Log} \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n) \text{ Log von } u(t) = f(t, u) \text{ und } u(0) = u_0 \text{ (AWP)}$

Außerdem gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} |u| = \infty$ oder $T = \infty$

• **Banach:** Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und sei $\Phi: M \rightarrow M$ kontrahierend, d.h.
 $\exists q < 1: d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q d(x, y) \forall x, y \in M$
 $\Leftrightarrow \exists ! \tilde{x} \in M: \Phi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

• **Bsp: Picard:** z.z. $\exists ! \text{Log von } \dot{x} = 2t^2(x - x^{1/2}) =: f(x, t)$
 $|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |2t^2(x_1 - x_2) - 2t^2(x_1^{1/2} - x_2^{1/2})| \leq 2t^2|x_1 - x_2| + 2t^2|x_1^{1/2} - x_2^{1/2}| \leq 4t^2|x_1 - x_2| \leq m|x_1 - x_2|$
 $\Rightarrow L$ -stetig $\Rightarrow$ Satz anwendbar

Kapitel 3: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Differenzieren im $\mathbb{R}^n$: Definitionen

• $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an $x_0 \in \Omega$ in Richtung x^i partiell diff'bar, falls $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} =: \partial_i f(x_0)$ existiert

• $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an $x_0 \in \Omega$ diff'bar, falls eine lin. Abb. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$

• $f \in C^1(\Omega)$, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ in jede Richtung x^i partiell diff'bar und falls $\forall x \in \Omega: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ stetig

• $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m = df(x_0)$ ist das Differential/ totale Ableitung. Ist f auf $\mathbb{R}^2$ diff'bar?

$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jacobi-Matrix}$

• **Gradient** von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

• Das Vektorfeld $v \in C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ heißt konservativ, falls für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1([0, 1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_{\gamma} v d\vec{s} = 0$

falls diag'bar

EV $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

• **Hesse-Matrix** $\text{Hess} f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1, \dots, n}$

f stetig $\Leftrightarrow f \in C^0 \Leftrightarrow f$ diff'bar $\Rightarrow$ partielle Ableitungen $\exists$

partielle Ableitungen sind stetig $\Leftrightarrow$ definition von diff'bar

Differenzieren im $\mathbb{R}^n$: Rechenregeln

• Seien $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

(1) $d(fg)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$ (2) $d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0)$

(3) $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$ (Skalarprodukt)

(4) $d(f/g)(x_0) = (g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)) / (g(x_0))^2$

• Kettenregel: $d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) dg(x_0)$

• Multivariable Chain Rule (Khan): $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

Differenzieren im $\mathbb{R}^n$: Sätze

• Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann ist f lokal L-stetig

• Für $v \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt: v konservativ $\Leftrightarrow \exists f \in C^1(\Omega): v = \nabla f$ (Potenzial)

• Sei $v \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ konservativ. Dann gilt für $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

• **Mittelwertsatz:** Sei $f: B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar, $x_0, x_1 \in B_r(0)$

Dann existiert $0 < \delta < 1$ mit $f(x_1) - f(x_0) = df(x_\delta)(x_1 - x_0)$

wobei $x_\delta = g(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ für $t \in [0, 1]$ (Konvexkombination)

• **Taylorformel:** Sei $f \in C^m(\Omega)$, $x_0, x_1 \in \Omega$

$f(x_1) = f(x_0) + df(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) (x_1^i - x_0^i)(x_1^j - x_0^j) + \dots$

$\dots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(x_0) (x_1^{i_1} - x_0^{i_1}) \dots (x_1^{i_m} - x_0^{i_m})$, $\delta < 1$

In 2 Dimensionen $f(x, y)$ um $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right) + \dots$

Differenzieren im $\mathbb{R}^n$: Beispiel $\left\{ (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), (x, y) \neq (0, 0) \right\}$

$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(1) Sei $(x, y) \neq (0, 0)$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f eine Komposition von diff'baren Abb. und somit diff'bar.

$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \dots, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \dots$

Also ist f für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ nach allen Variablen partiell diff'bar und die partiellen Ableitungen sind stetig für $(x, y) \neq (0, 0)$.

(2) Sei $(x, y) = (0, 0)$.

$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(\frac{1}{t})}{t} \stackrel{\text{analog}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin(\frac{1}{t})}{1} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)$

Also ist die Jacobi-Matrix von f $df(0, 0) = (0 \ 0)$.

Definition besagt: f ist in $(0, 0)$ diff'bar $\Leftrightarrow$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ Polar-Koordinaten

$\lim_{r \rightarrow 0} \dots = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin(\frac{1}{r})}{r \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin(\frac{1}{r}) = 0$

Also ist f in $(0, 0)$ diff'bar und somit auf ganz $\mathbb{R}^2$.

(3) Sind partielle Ableitungen von f stetig?

$f(x, y) = f(r, \varphi) = \begin{cases} r^2 \sin(\frac{1}{r}) & \text{für } r > 0 \\ 0 & \text{für } r = 0 \end{cases}$

$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} (2r \sin(\frac{1}{r}) - \cos(\frac{1}{r}))$ existiert nicht

aber $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0 \Rightarrow$ unstetig.

Kapitel 10: Implizite Fkt, Umkehratz

• Satz über implizite Fkt: (Voraussetzung nicht erfüllt $\Rightarrow$ keine Aussage aber d.h. existiert nicht)

Sei $f: W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und es gelte:

(1) $f(x_0, y_0) = 0$ für $x_0 \in \mathbb{R}^k, y_0 \in \mathbb{R}^m$

(2) f ist stetig ($f \in C^1$)

(3) $D_y f(x_0, y_0)$ ist invertierbar ($\det \neq 0$)

Dann existieren Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^k$ um x_0 , $V \subset \mathbb{R}^m$ um y_0 und eine Abb.: $k: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, o.d.:

(1) $U \times V \subset W$

(2) $f(x, k(x)) = 0$ für $x \in U, y \in V \Leftrightarrow y = k(x)$

(3) $y_0 = k(x_0)$

(4) k ist stetig in $x_0 \rightarrow$ kann Vektorwertig sein! Δ

Inbesondere ist $Dk(x) = -(D_y f)^{-1}(D_x f)(x, k(x))$

• **Kochrezept:** Ist y an der Stelle (x_0, y_0) nach y auflösbar?

(i) überprüfe Voraussetzungen (1) & (2)

(ii) identifiziere $f(x_1, \dots, x^k, y_1, \dots, y^m)$ als $f(x, y)$

(iii) berechne Jacobi-Matrix $Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$

(iv) $\det(D_y f(x_0, y_0)) \neq 0 \Rightarrow$ auflösbar

(v) berechne $Dk(x) = -(D_y f)^{-1}(D_x f)(x, y)$. $D_x f$

y_0 einsetzen x_0 einsetzen

• **Bsp:** $f(x, y, z) = (-2x^2y^2 + e^{z-1}, 3x^2 + e^{t-1}, 4y)^T = 0, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

z.z.: System kann in Umgebung von $(1, 1, 1)$ durch Fkt

$(y(x), z(x)) = k(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgelöst werden.

(1) $f(1, 1, 1) = 0, f$ stetig; (2) Identifikation: $f(x, y, z)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots, \frac{\partial f}{\partial y} = \dots, \frac{\partial f}{\partial z} = \dots$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -b & a \\ -c & a \end{pmatrix}$$



$$(3) Df = \begin{pmatrix} -4x & 2y & e^{x-1} \cdot 2z \\ 6x & e^{x-1} & 0 \end{pmatrix} = (D_x f | D_y f)$$

$$(4) Df(1,1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det = 6+0 \Rightarrow \text{auflösbar } Df(a) \neq 0$$

$$(5) Df(1) = -(D_y f)^{-1} (D_x f)(1,1) = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umkehrsatz: Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Ang. es gilt

(1) $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$; (2) $f(x_0) = y_0, x_0 \in \Omega$; (3) $df(x_0)$ inv'bar.

Dann existieren Umgebungen U von x_0 , V von y_0 und eine Fkt $g = (g_i)^{-1}, g \in C^1(V; \mathbb{R}^k)$ s.d.

$\forall x \in U: g(f(x)) = x, \forall y \in V: f(g(y)) = y$, das heißt s.d.

$f|_U: U \rightarrow V$ bijektiv, also ist fein

$g: V \rightarrow U \in C^1$ } Diffeomorphismus.

Es gilt zusätzlich $dg(f(x)) = (df(x))^{-1}$

Kapitel 11: Untermannigfaltigkeiten

Untermannigfaltigkeiten: Definitionen

Eine Abb. $\psi \in C^m(\Omega \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ heißt Diffeomorphismus auf $V = \psi(\Omega)$ der Klasse C^m , falls

ψ bijektiv (stätti: injektiv) und $\psi^{-1} \in C^m(V; \mathbb{R}^n)$.

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt Untermannigfaltigkeit

der Dimension k , falls zu jedem Pkt $p_0 \in S$ eine

Umgebung W von p_0 und ein Diffeomorphismus

$\psi \in C^m(W; \mathbb{R}^n)$ von W auf $V = \psi(W)$ existieren, s.d.

$\psi(W \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, p_0$ heißt regulärer Pkt von f

$\Leftrightarrow \text{Rang}(df(p_0)) \text{ maximal} \Leftrightarrow \text{Rang}(df(p_0)) = \min\{n, m\}$.

$q_0 \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f , falls

$f^{-1}(\{q_0\})$ nur reguläre Pkte enthält.

Der Raum $T_{p_0} S = \{ \dot{\gamma}(0) | \gamma \in C^1(I; S), \gamma(0) = p_0 \}$

heißt Tangentialraum an S in p_0 .

Untermannigfaltigkeiten: Sätze

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n > m$ eine C^1 -Abb. und sei

$M := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. Seien außerdem

alle $p \in M$ reguläre Pkte, d.h. $\text{rang}(df(p)) = m$.

dann ist M eine UMF von $\mathbb{R}^n$ mit Dim. $n-m$.

Δ folgt aus Satz über implizite Fkten.

Bsp.: $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$, also $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x=y=z=0$, aber $(0,0,0) \notin M$

$\Rightarrow M$ enthält nur reguläre Pkte

$\Rightarrow M$ ist UMF der dim 2 (von $\mathbb{R}^3$)

Sei M eine diff'bare UMF. Dann gilt für alle $a \in M$:

(1) $T_a M$ ist $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dim. $n-m$

(2) falls $M = f^{-1}(\{0\})$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so ist $T_a M = \ker(df(a))$

Kapitel 12: Extremwertprobleme

Ohne Randbedingung: Kochrezept Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(1) Notwendige Bedingung: $\text{grad}(f) = \nabla f = (2x_1 f \dots 2x_n f)^T \neq 0$

$\Rightarrow$ kritische Pkte

(2) unter Suche Hessematrix in kritischen Pkten

$$Hess_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_{11} f & 2x_{12} f & 2x_{1n} f \\ 2x_{21} f & 2x_{22} f & 2x_{2n} f \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

zweifache part. Ableit.

$\begin{cases} \text{pos. def.} \\ \text{neg. def.} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \text{ ist lokales Min} \\ x_0 \text{ ist " Max} \\ x_0 \text{ ist " Sattelpkt} \end{cases}$

pos. def.: $\Leftrightarrow \forall EW > 0 \Leftrightarrow 2x_{11} f(x_0) > 0$ und $\det(Hess_f(x_0)) > 0$

neg. def.: $\Leftrightarrow \forall EW < 0 \Leftrightarrow 2x_{11} f(x_0) < 0$ und $\det(Hess_f(x_0)) < 0$

indefinit: $\Leftrightarrow \exists EW \leq 0 \Leftrightarrow$ Hauptminoren nicht alternierend.

Δ siehe auch Michaels Variante auf Blatt III

Mit Randbedingungen (Gebiet): Kochrezept

Bem.: Ist nach sup, inf gefragt und das Gebiet offen,

finde dann auch Max/Min auf dem Rand.

(1) Zerlege Gebiet in offenen Inneren und Rand

(2) Offener Innerer: benutze Kochrezept ohne RB.

(Max/Min werden nicht zwingend angenommen)

(3) Rand: Nebenbedingung $g_1(x^*) = 0, \dots, g_k(x^*) = 0$

a) Einsetzungsmethode: setze Nebenbedingung (NB)

in f ein und eliminiere so k Variablen.

$$\text{Bsp.: } f(x, y, z) = \frac{1+x^2+y^2-z}{x^2+z}, NB \ g(y, z) = z-1-y^2=0$$

$$\Rightarrow z=1+y^2 \Rightarrow f(x, y, z) = f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{x^2+1+y^2}$$

b) Lagrange-Multiplikatoren

(i) Definiere Hilffkt $L(x, y, z, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_k g_k$

(ii) Bedingungen: $\begin{cases} \partial_x L = 0 \\ \partial_y L = 0 \\ \partial_z L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla L = 0 \\ g_i = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} g_1 = 0 \\ \vdots \\ g_k = 0 \end{cases} \Rightarrow$ n+k Gleichungen für

n+k Unbekannte

(iii) Löse das System für $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ krit. Pkte

(4) Rand vom Rand (Ecken, nicht reguläre Pkte der

NB) betrachten.

Δ und betrachte $\nabla g_i = 0$ auch als krit. Pkte Δ

(i) schreibe NB in Matrix $G = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$

(ii) berechne DG (Jacobimatrix)

(iii) nicht reguläre Pkte von G sind Pkte, bei denen

$\text{Rang}(DG(p_0))$ nicht maximal ist

(iv) falls diese noch im Gebiet liegen, betrachte

sie als kritische Pkte

(5) Gebiet kompakt $\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$ Min/Max wird im

Gebiet angenommen, d.h. werte alle krit. Pkte

einfach aus und vergleiche sie.

sonst: Hessematrix (von L -Fkt Δ) betrachten.

Extremwertproblem Bsp.:

Untersuche $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ auf $D = \{ (x, y) | x^2 + y^2 \leq 1 \}$

(i) Innerer: $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ ist}$

krit. Pkt

(ii) Rand: $\partial D = \{ (x, y) | x^2 + y^2 = 1 \}$, $L(x, y, z) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 2x\lambda = 0 \\ -2x + 6y - 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \text{weitere krit. Pkte}$$

$\Rightarrow$ einsetzen & vergleichen

Finde Supremum/Infimum von f auf $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{2} \}$

betrachte $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{2} \}$ und berechne

Min/Max (kompakt) und entscheide dann, ob

für f ein Min/Max oder Sup/Inf vorliegt.

Δ siehe auch Bem. zu EWP mit NB auf Blatt III

Kapitel 13: Metrik

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls für je zwei

offene Mengen Ω_1, Ω_2 gilt: $\Omega \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2)$,

$\Omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset \Rightarrow \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls $\forall x_0, x_1 \in \Omega: \forall t \in [0, 1]: (1-t)x_0 + tx_1 \in \Omega$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls für alle

$x_0, x_1 \in \Omega$ ein stetiger Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ existiert mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt & zusammenhängend heißt

einfach zusammenhängend, falls $\partial \Omega$ nur eine Komponente hat

Zusammenhängend & offen $\Rightarrow$ wegzusammenhängend

Wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend.

Δ siehe auch einfach zusammenhängende Mengen

Michaels Variante auf Blatt II/III

Kapitel 14: Koordinatentransformation

Allgemeine Substitutionsregel:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus von U auf $V = \phi(U)$. Sei $\Omega \subset U$ beschr. und Jordanmessbar und sei $f: \phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -Integrierbar. Dann gilt

$$\int_{\phi(\Omega)} f(u) du = \int_{\Omega} f(\phi(x)) \cdot |\det(d\phi)| dx$$

PVK: Seien $D_x, D_u \subset \mathbb{R}^n$ offene und beschränkte Gebiete, $\psi: D_u \rightarrow D_x$ ein Diffeomorphismus, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_u} f(\psi(u)) |\det(d\psi)| du$

In 2-D: $\int_{\phi(E)} f(x,y) dx dy = \int_E f(\phi(u,v)) |\det(d\phi)| du dv$

Bsp.: $\int_{\phi(E)} e^{(x-y)/(x+y)} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2-x} e^{(x-y)/(x+y)} |\det(d\phi)| dy dx$

Wir setzen: $\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(v-u) \\ y = \frac{1}{2}(u+v) \end{cases} \triangleq \phi$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v-u) \\ \frac{1}{2}(u+v) \end{pmatrix}^T$

$d\phi = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(d\phi)| = |-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_D = \int_{\phi(E)} e^{(x-y)/(x+y)} \frac{1}{2} du dv = \int_E e^{u/v} \frac{1}{2} du dv$

Bestimme Ränder: $\frac{du}{dx dy} = \frac{du}{du dv}$

$y=0: 0 = \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow v = -u$

$x=0: 0 = \frac{1}{2}(v-u) \Rightarrow v = u$

$x+y=2: \frac{1}{2}(v-u) + \frac{1}{2}(u+v) = 2 \Rightarrow v = 2$

$\Rightarrow \int_0^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v e^{u/v} \Big|_{u=-v}^{u=v} dv$

$= \frac{1}{2} \int_0^2 v (e - e^{-1}) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^2 = e - e^{-1}$

Variante mit det-Eigenschaft: $\det(\phi^{-1}) = \det(\phi)^{-1}$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ y+x \end{pmatrix}, d\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(\phi^{-1})| = |-1-1| = 2 \Rightarrow |\det(\phi)| = \frac{1}{2}$

Bsp. 2: $(\int_0^\infty e^{-x^2} dx) (\int_0^\infty e^{-y^2} dy) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

polark.: $= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi = \dots = \pi \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Wichtige Transformationen

Koordinaten	Definition	Bereiche	Vol. element
Polar-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$	$r dr d\varphi$
Ellipsen-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$	$ab r dr d\varphi$
Zylinder-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $z \in \mathbb{R}$	$r dr d\varphi dz$
Sph.-Kugel-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq \vartheta \leq \pi$	$r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\vartheta$

Kugel-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq \vartheta \leq \pi$	$r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\vartheta$
Ellipsoid-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq \vartheta \leq \pi$	aber $\cos(\vartheta) \cdot dr d\varphi d\vartheta$
Ellipsen-Zylinder-	$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$	$r \geq 0$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $z \in \mathbb{R}$	aber $dr d\varphi dz$

Bsp.: Berechne $\int_{\Omega} xy(x^2+y^2) dx dy$ über $\Omega = \{x,y \geq 0 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$
 $\int_{\Omega} xy(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos(\varphi) \sin(\varphi) r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \sin(2\varphi) d\varphi = 0$

Kapitel 15: Integration im $\mathbb{R}^n$ - Definitionen

Ein n -dim. Quader ist ein Produkt $Q = \prod_{i=1}^n I_i$ von offenen, abgeschlossenen oder halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}$.

Eine Zerlegung $P = \{Q_i, 1 \leq i \leq k\}$ eines Quaders Q ist eine disjunkte Sammlung von Teilquadern $Q_i \subset Q$, s.d. $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$. (max. Durchmesser) $\triangleq \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{x,y \in Q_i} \|x-y\|$

Die Feinheit einer Zerlegung ist $\delta = \max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(Q_i)$

Eine Fkt $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, falls f eine Darstellung der Form $\delta = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{Q_i}$ besitzt mit einer Zerlegung P von Q und $c_i \in \mathbb{R}$.

Das Riemann-Integral einer Treppenfkt $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{Q_i}$ ist $\int_Q f \mu(dx) = \sum_{i=1}^k c_i \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^k c_i \mu(Q_i)$

Eine Fkt f heißt $\mathbb{R}$ -Integrierbar über Q , falls $\int_Q f \mu(dx) = \int_Q f \mu(dx)$ also falls

$\sup \sum_{i=1}^k S_{\mu}(Q_i) \leq \inf \sum_{i=1}^k S_{\mu}(Q_i) \leq \inf \sum_{i=1}^k S_{\mu}(Q_i) \leq \sup \sum_{i=1}^k S_{\mu}(Q_i) = \int_Q f \mu(dx)$

Für $\mathbb{R}$ -Integrale Fkten gilt: Linearität, Monotonie, Gebietsadditivität und die Abschätzung $|\int_Q f \mu(dx)| \leq \int_Q |f| \mu(dx) \leq \sup_{x \in Q} |f(x)| \mu(Q)$.

Satz von Fubini: Sei $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $f \in C^0(Q)$. Dann gilt $\int_Q f \mu(dx) = \int_{a_1}^{b_1} (\dots (\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n) \dots) dx_1$ und die Reihenfolge darf beliebig vertauscht werden. Wähle geschickt!

Sei $\Omega \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ beschr., wobei Q ein Quader. Ω heißt Jordan-messbar, falls χ_{Ω} über Q $\mathbb{R}$ -Integrierbar ist. Dann heißt $\mu(\Omega) = \int_Q \chi_{\Omega} \mu(dx)$ die Jordan-Masse von Ω .

Ein $\Omega = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ mit disjunkten Quadern heißt Elementarfigur (sind Jordan-messbar).

Ω Jordan-messbar $\Leftrightarrow \partial\Omega$ Jordan-messbare Nullmenge, also $\mu(\partial\Omega) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Elementarfig. $E, G \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \Omega \subset G$ s.d. $\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon$

Sei $\Omega \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ beschr. und Jordan-messbar, wobei Q Quader und sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschr., $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}|_{\Omega} = f$ eine Erweiterung von f auf Q . Dann heißt f $\mathbb{R}$ -Integrierbar über Ω , falls $\tilde{f} \chi_{\Omega}$ über Q $\mathbb{R}$ -Integrierbar ist und $\int_{\Omega} f d\mu = \int_Q \tilde{f} \chi_{\Omega} d\mu$.

Kapitel 16: Integrale über Normalbereiche

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bzgl. y der Klasse C^1 , falls $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^1[a,b]$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich, falls Ω bzgl. x und y Normalbereich ist.

Satz: Normalbereiche sind Jordan-messbar und falls $h \in C^0(\Omega)$, dann $\int_{\Omega} h d\mu = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y) dy dx$ $\triangleq$ Formel

Kochrezept: Integral von f über Ω N.bereich berechnen
(1) Skizze

(2) Ist Ω Normalbereich bzgl. x oder y ?
Ja: Ω als "umschreiben".

(3) benutze Formel

Bsp.: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0, x+y \leq \sqrt{2}\}$, $f(x,y) = x+y^2$
 B Normalbereich bzgl. y

$\Rightarrow B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$

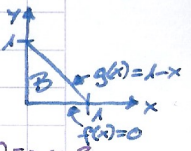
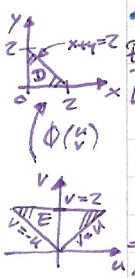
$\int_B f d\mu = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y^2) dy dx = \dots$

Kapitel 17: Konservative Felder (Potenzialfelder)

Das Vektorfeld $v \in C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ heißt konservativ (Gradientenfeld) Potentialfeld, falls für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ "Potential" mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_{\gamma} v d\vec{s} = 0$.

v ist konservativ $\Leftrightarrow \text{rot}(v) = 0 \Leftrightarrow \exists f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}): v = \nabla f$ also falls $v(x^1, \dots, x^n) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ \partial_n f(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$

v besitzt ein Potential $\Rightarrow \int_{\gamma} v d\vec{s} = f(b) - f(a)$, $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
Wegunabhängig und falls γ geschlossen folgt $\int_{\gamma} v d\vec{s} = 0$. $\triangleq$ Formel 2



Kochrezept: Um das Potenzial eines Gradientenfeldes zu finden.

Bem.: Überprüfe evtl. vorher ob $\text{rot}(v) = 0$.

Sei $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xe^y \\ \cos(z) - x^2e^y \\ -4\sin(z) \end{pmatrix}$ gesucht wird $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Potential.

- (1) $\frac{\partial}{\partial x} f = 2xe^y \Rightarrow \int 2xe^y dx = x^2e^y$
 $\Rightarrow f(x,y,z) = x^2e^y + c(y,z)$
- (2) $\frac{\partial}{\partial y} f = -x^2e^y + \frac{\partial}{\partial y} c(y,z) = \cos(z) - x^2e^y$
 $\Rightarrow c(y,z) = y\cos(z) + c(z)$
 $\Rightarrow f(x,y,z) = x^2e^y + y\cos(z) + c(z)$
- (3) $\frac{\partial}{\partial z} f = -4\sin(z) = -4\sin(z) + \frac{\partial}{\partial z} c(z)$
 $\Rightarrow c(z) = 4\cos(z)$
 $\Rightarrow f(x,y,z) = x^2e^y + y\cos(z) + 4\cos(z)$

Sätze aus Vorlesung:

- Schwarz:** Sei $f \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ offen. Dann gilt $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f$.
- Kor.:** Sei $v = (v_i)_{i=1}^n \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ konservativ. Dann gilt $\partial_{x_i} v_j = \partial_{x_j} v_i, 1 \leq i, j \leq n$
- Bem.:** Aus Schwarz erhalten wir eine notwendige Bedingung für die Konservativität.

Bsp.: Sei $v(x,y) = (4xy^2, 2y)$.

$\partial_y v = 8xy \neq \partial_x v^2 = 0 \Rightarrow v$ ist nicht konservativ

Bem.: Konservativität ist eine Eigenschaft zugleich des Vektorfeldes und der Region Ω (Ω muss einfach zusammenhängend sein)

Kapitel 18: Wegintegrale

Kochrezept: um Wegintegrale zu berechnen.

Sei $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.

- (1) überprüfe ob Potenzial existiert.
 - (i) Ja: Formel (2.3 rechts) oder parametrisiere p als gerade zw. a, b (Orientierung)
 - (ii) Nein: weiter mit (2)
- (2) parametrisiere $p: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 Orientierung: eingeschlossene Fläche liegt zur Linken von p .

(3) berechne $\dot{p}(t) = \begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}_3(t) \end{pmatrix}$

(4) benutze folgende Formel $\int_C v(p(t)) \dot{p}(t) dt$

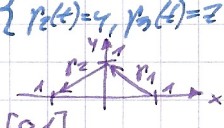
$$S_p \cdot \dot{v} d\vec{s} = \int_a^b v(p(t)) \dot{p}(t) dt$$

Bsp.: $F(x,y) = (e^x+1, 3x^2-4xy+4y^3)^T$

(1) $p_1 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}, t \in [0,1], p_2 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}, t \in [0,1]$

(2) $\dot{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dot{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $S_p F d\vec{s} = \int_0^1 (e^{1-t}+1, 3(1-t)^2-4(1-t)^2+4(1-t)^3)^T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt + \dots$



Kapitel 19: Volumenintegral

$\int_V f dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) dx dy dz$

mit Parametrisierung, Koordinatentransform.

Bsp.: Berechne Volumen von $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq R\}$ 3D-Kugel

$$\int_M dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Bsp.: Berechne Volumen von $N = \{x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

$$\int_N dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \frac{1}{6}$$

Kapitel 20: Vektoranalysis

Skalarfeld $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **Vektorfeld** $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Gradient $\text{grad}(f) = \nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Divergenz $\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \partial_{x_1} F_1 + \dots + \partial_{x_n} F_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (n=m)$

Laplace $\Delta = \text{div}(\text{grad}(f)) = \partial_{x_1}^2 f + \dots + \partial_{x_n}^2 f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Rotation $\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$

(i) 3 Dimensionen: $\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$

(ii) 2D (Skalar-Rot.): $\text{rot}(F) = \partial_x F_y - \partial_y F_x$

Vektoranalysis: Parametrisierung, Orientierung

Sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ eine

Parametrisierung und sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im

Raum. Dann existiert ein $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s.d. $\Phi(\Omega) = S$. Somit

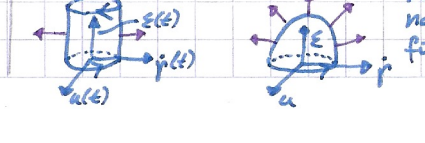
ist Φ eine Immersion, also $\text{Rang}(D\Phi) = 2 \forall x \in \Omega$.

Ein stetiges Einheitsnormalvektorfeld $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$

definiert eine Orientierung von S (S eine 2D UMF).

Eine ONB $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ist pos. orientiert, falls (u,v)

aus einer Drehung aus der Std-Basis (e_1, e_2) hervorgeht.



Konvention: Normalvektor nach außen gerichtet für geschl. Oberfläche

Vektoranalysis: Flächenelement

Skalares Flächenelement: $ds = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv$

Vektoriell: $d\vec{s} = \vec{n} ds = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du dv$

Bsp.: "Explizite Fläche" $\Phi(x,y) = (x,y,f(x,y))^T$

$$\partial_u \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = (-f_x, -f_y, 1)^T$$

$$\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

$$ds = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dx dy, d\vec{s} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} dx dy$$

Kapitel 21: Mehrdimensionale Integralsätze

Mehrdim. Integrale: Flussintegrale

Vektoriell: Seien gegeben ein Vektorfeld

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine 2D UMF S und eine Parametrisierung $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$

Dann definiert

$$\Phi_* = \int_S F d\vec{s} = \int_\Omega F(\Phi(u,v)) (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi) du dv$$

den Fluss von F durch S .

Skalar: $\int_S f d\vec{s} = \int_\Omega f(\Phi(u,v)) \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| du dv$

für $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Für $f=1$ ergibt das skalare

Flächenintegral die Oberfläche.

Bem.: Falls $\text{div}(F)=0$ handelt es sich um ein

"externes Feld", d.h. der Fluss durch geschl.

Oberfläche verschwindet. Sonst spricht man

von einem Quellfeld.

Bsp.: Berechne Fluss von $F = \begin{pmatrix} -x \\ z \end{pmatrix}$ durch Kegel-

mantel $M = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$ k-Boden $B = \{x^2+y^2 \leq 1, z=0\}$

$M: \Phi = (x,y,1-\sqrt{x^2+y^2})^T, \partial_u \Phi = (1,0,-x/\sqrt{x^2+y^2})^T$

$$\partial_v \Phi = (0,1,-y/\sqrt{x^2+y^2})^T, \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_M F d\vec{s} = \int_B \begin{pmatrix} -x \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = 0$$

B: $\Phi = (x,y,0)^T, \partial_u \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Orientierung $\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow F \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \text{Fluss (insgesamt)} = 0$

Mehrdim. Integrale: Sätze

Satz von Green (2D): Sei $\vec{r} = (v_1, v_2)$ ein stetig

differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial \Omega} \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_\Omega (\partial_x v_2 - \partial_y v_1) dx dy$$

Wegintegral Flussintegral

Aus VL: $\int_{\partial \Omega} \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_\Omega (\partial_x v_2 - \partial_y v_1) dx dy = \int_\Omega P dx + Q dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (dx)$

Bsp.: berechne $\int_{\partial \Omega} g dx + h dy$ für $g(x,y) = x-y$, $h(x,y) = 2x + e^y$ über Ω Einheitscheibe.

Green: $I = \int_{\partial \Omega} 3 dx dy = 3\pi$ somit Kreis parametrisieren.

Bem.: $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ für f 2π -periodisch und antisymmetrisch $f(t) = -f(-t)$

Satz von Stokes: Sei S eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂S und F ein stetig diff'bares Vektorfeld. Dann:

$$\int_S \text{rot}(F) d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} F d\vec{s}$$

Flächenintegral Wegintegral

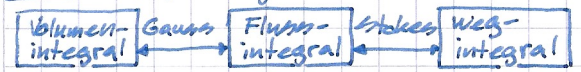
Bsp.: $\int_S \text{rot}(F) d\vec{\sigma} = \int_S \text{rot} \begin{pmatrix} x^2 y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{\sigma} = \int_S \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{\sigma}$

Satz von Gauss: Sei $V = \text{Vol}(S) \subset \mathbb{R}^3$ ein beschr. Volumen mit Rand $\partial V = S$ eine Fläche und sei F ein stetig diff'bares Vektorfeld:

$$\int_{\text{Vol}(S)} \text{div}(F) dx dy dz = \int_S F d\vec{\sigma}$$

Volumenintegral Flächenintegral

Bem.: $\text{Vol}(S)$ ist geschlossen!



2D Divergence Thm (2D Gauss):

$$\int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Omega} P(x,y) dy - Q(x,y) dx = \int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dA$$

Kapitel 22: k-Formen

k-Formen: Definitionen:

Eine Abbildung $\lambda: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ heißt Differentialform vom Grad k.

$L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \{ \text{lin. Abb.: } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \}$ ist ein $\mathbb{R}$ -VR mit Basis $dx_1, \dots, dx_n$ d.h. für $\lambda: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ folgt $\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx_i$.

Eine k-lineare Abb. $\lambda: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt alternierend, falls $\lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\lambda(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$
 $\Rightarrow \lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0$.

$\Lambda^k \mathbb{R}^n := \{ \lambda \mid \lambda \text{ k-linear und alternierend} \}$.

Wedge-Produkt: Seien $\mu \in \Lambda^k \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda^m \mathbb{R}^n$.

Wir definieren $\wedge: \Lambda^k \mathbb{R}^n \times \Lambda^m \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^{k+m} \mathbb{R}^n$ als

$$\mu \wedge \lambda(x_1, \dots, x_{k+m}) = \frac{1}{k! m!} \sum_{p, q} \text{sgn}(p) \mu(x_{p(1)}, \dots, x_{p(k)}) \lambda(x_{p(k+1)}, \dots, x_{p(k+m)}).$$

$k=1$: $dx_1, \dots, dx_n$ Basis von $\Lambda \mathbb{R}^n$.

$k=2$: Basis $dx_i \wedge dx_j$ mit $1 \leq i, j \leq n$ und es gilt

$$(dx_i \wedge dx_j)(e_k, e_m) = \delta_{ki} \delta_{mj} - \delta_{mi} \delta_{kj}$$

$k \leq n$: $\Lambda^k \mathbb{R}^n = \text{span} \{ dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$

Eine k-Form der Klasse C^m auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist eine Abb. $x \mapsto \lambda(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$ wobei $\lambda_{i_1, \dots, i_k} \in C^m(\Omega)$ die Koeffizienten sind.

Wir schreiben $\lambda \in C^m(\Omega; \Lambda^k \mathbb{R}^n)$.

$$\dim(\Lambda^k \mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}, \quad \dim(\bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k \mathbb{R}^n) = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Die äußere Ableitung von λ ist die (eind.) Form $d\lambda$ mit $d\lambda = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \lambda_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j, i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_{i_1, \dots, i_k}) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Eine k-Form heißt geschlossen, falls $d\lambda = 0$.

Eine k-Form heißt exakt, falls eine (k-1) Form v existiert mit $\lambda = dv$.

Sei $\psi: U \rightarrow V$ eine injektive C^{m+1} -Immersion, λ eine k-Form der Klasse C^m auf V . Dann heißt ψ^* : k-Form d. Klasse C^m auf $V \rightarrow$ k-Form d. Kl. C^m auf U Pullback.

$$(\psi^* \lambda)(x)(v_1, \dots, v_k) = \lambda(\psi(x))(d\psi(x)v_1, \dots, d\psi(x)v_k).$$

Seien w_1 eine k-Form, w_2 eine m-Form auf V und $\psi: U \rightarrow V$. Dann gilt: $\psi^*(w_1 \wedge w_2) = (\psi^* w_1) \wedge (\psi^* w_2)$

(Wedgeprodukt ist natürlich)

$$\psi^*(dw_1) = d(\psi^* w_1)$$

(äußere Ableitung ist natürlich).

Ergänzung: Trigonometrie

Trigonometrie: Funktionen

• Exponentialfkt.: $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \dots$
 $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, $\exp(0) = 1$

• Logarithmusfkt.: $\ln := \exp^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

(i) $a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$ (ii) $a^x = e^{x \ln(a)}$ (iii) $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Log.-Gesetze: (i) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

(ii) $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$ (iii) $\log(x^p) = p \log(x)$

(iv) $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$

• Trigonometrische Fkt.:

$\cos(z) = \operatorname{Re}(e^{iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots$

$\sin(z) = \operatorname{Im}(e^{iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$
 $= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

• Eulerformel: $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

Winkel:

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

$\sin(x)$

$\cos(x)$

$\tan(x)$

Sinusthm: $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$

Cosinusthm: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

Transformation grad-rad: $\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi}$, r in rad

• Hyperbolische Fkten.:

$\sinh = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $\cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\tanh = \sinh/\cosh$; $\cosh^2(x) = 1 - \tanh^2(x)$

• Additionsthem.:

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$

$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$

$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\sin(3\alpha) = 3 \sin(\alpha) - 4 \sin^3(\alpha)$

$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3(\alpha) - 3 \cos(\alpha)$

$\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$

$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$

$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

$\tan(\alpha \pm \beta) = (\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)) / (1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta))$

$\tan(2\alpha) = (2 \tan(\alpha)) / (1 - \tan^2(\alpha))$

$\tan(3\alpha) = (3 \tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)) / (1 - 3 \tan^2(\alpha))$

$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = (1 - \cos(\alpha)) / (1 + \cos(\alpha))$

$\tan(\frac{\alpha}{2}) = (1 - \cos(\alpha)) / \sin(\alpha) = \sin(\alpha) / (1 + \cos(\alpha))$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$

$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \sin(\alpha + \beta) / (\cos(\alpha) \cos(\beta))$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$

$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \sin(\alpha - \beta) / (\cos(\alpha) \cos(\beta))$

$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \cos(\alpha - \varphi) \sqrt{a^2 + b^2}$, mit $A := \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$, $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

$\cosh(x) = \cosh(-x)$

$\tanh(-x) = -\tanh(x)$

$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$

$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$

$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$

$\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$

$(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \sinh(nx) + \cosh(nx)$

$\tanh(x+y) = (\tanh(x) + \tanh(y)) / (1 + \tanh(x) \tanh(y))$

$\tanh(2x) = (2 \tanh(x)) / (1 + \tanh^2(x))$

$\sinh^2(\frac{x}{2}) = (\cosh(x) - 1) / 2$

$\cosh^2(\frac{x}{2}) = (\cosh(x) + 1) / 2$

$\tanh(\frac{x}{2}) = (\cosh(x) - 1) / \sinh(x) = \frac{\sinh(x)}{1 + \cosh(x)}$

$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x})$

$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln(\frac{x+1}{x-1})$

Ergänzung: Parametrisierung

• Torus: $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos(u)) \cos(v) \\ (R + r \cos(u)) \sin(v) \\ r \sin(u) \end{pmatrix}$

$u, v \in [0, 2\pi]$

• Ellipsoid mit Parametern a, b, c $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a \sin(u) \cos(v) \\ b \sin(u) \sin(v) \\ c \cos(u) \end{pmatrix}$

• Hyperboloid $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a \cdot \cosh(u) \cos(v) \\ b \cdot \cosh(u) \sin(v) \\ c \cdot \sinh(u) \end{pmatrix}$ mit Parametern $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [c_1, c_2]$

• Paraboloid: $\varphi(z, r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$

$0 \leq z \leq a^2$ $0 \leq r \leq a$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z}$ or $r^2 \leq a^2 - z$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$

• Drehkörper:

(1) M als Normalbereich

$M = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq z \leq b, f(z) \leq x \leq g(z)\}$

(2) Ersetze x durch $r \cos(\phi)$ und z durch $r \sin(\phi)$

$\varphi(z, r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$

$a \leq z \leq b$ $f(z) \leq r \leq g(z)$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$

• Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

• Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

• Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cosh(t) \\ b \sinh(t) \end{pmatrix}$, $t \in]-\infty, \infty[$

Ergänzung: Euklidische Geometrie

• Gerade: $\vec{r} = \vec{v} + t \vec{u}$, Ebene: $\vec{r} = \vec{v} + t \vec{u} + s \vec{w}$ or $ax + by + cz = d$

• Abstände: Pkt.-Gerade: $d(p, g) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|(\vec{v} - \vec{p}) \times \vec{u}\|$

Pkt.-Ebene: $d(p, \Omega) = |(ax + by + cz - d)| / (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$

Windschiefe Geraden: $d(g_1, g_2) = \frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|}$

• Volumina & Oberflächen:

Kugel: $A = 4\pi R^2$ Kugelkappe: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $A = \pi R (2R + p)$ $p = \sqrt{h(2R - h)}$

Ellipsoid: $V = \frac{4}{3} \pi abc$ Kugelkappe: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 (3R - h)$

Rotations- $A = \pi (2Rh + p^2)$ $p = \sqrt{h(2R - h)}$

Paraboloid: $V = \frac{1}{2} \pi p^2 h$ Kegel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Zylinder: $V = \pi R^2 h$ $A = \pi r (r + s)$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Pyramide: $V = \frac{1}{3} Ah$ $r = 2\pi \sin(\alpha)$

Kreis: $A = \pi r^2$, $U = 2\pi r$

$s = r \varphi$, $A = \frac{1}{2} r^2 \varphi = \frac{1}{2} r s$

Ergänzung zu Integralrechnung (R-Integrale)

Def. 2.1 (Partitionen): Eine Partition von $I = [a, b]$ ist eine endl. Teilmenge $P \subset I$, welche die Punkte a, b enthält. Die Menge aller Partitionen von I bezeichnen wir: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(I) = \{P \subset I \mid a \in P, b \in P, P \text{ ist endl.}\}$.
 $P \in \mathcal{P}, P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}, x_0 < \dots < x_n$.

Def.: Die Zahl $\mu(P) := \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$ der Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}(I)$ nennt man **Feinheit**.

Es gilt $N(P) := N = |P| - 1$, $|P| \leq$ Kardinalität v. P .
 D.h. $\mu(P)$ ist die Länge $I_k := [x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq N$.

Def.: Sei $\xi_k \in I_k$ Zwischenpt./Stützstellen, d. $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Jede Summe der Form

$S(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^N f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$ nennt man **Riemannsche Summe** der Zerlegung P & ξ .
 wobei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt ist.

Def. 2.2: (Ober- und Untersumme) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt und $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von I .

Die **Untersumme** $\underline{S}(f, P)$ und die **Obersumme** $\overline{S}(f, P)$ sind definiert durch:

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^N \inf_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$$

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^N \sup_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$$

Def. 2.4: Ein beschr. Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **R-integrierbar**, wenn $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P) = K$.

Dann ist $\int_a^b f(x) dx := K$ das **Integral** f über I .

Bem.: Aus der Def. folgt direkt, dass für eine R(I) ist ein reeller VR.

für jede Zerlegung P gilt stets:
 $\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq \overline{S}(f, P)$.

Lemma 2.3: Sei $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt.

(i) Für zwei Partitionen $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt:

$$P \subset Q \Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P).$$

(ii) $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$.

Lemma 2.3: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt. Dann sind

folgende Aussagen äquivalent: (i) f ist R-integrierbar

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $Q \in \mathcal{P}(I)$ mit $\overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) < \varepsilon$.

Satz 2.3: (i) Jede stetige Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist R-integrierbar.

(ii) Jede monotone Fkt ist R-integrierbar

Satz 2.1: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt und $A \in \mathbb{R}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist R-integrierbar und $A = \int_a^b f(x) dx$.

(ii) Für jeden $\varepsilon > 0$ existiert ein $P \in \mathcal{P}(I)$, s.d.

$$A - \varepsilon \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) < A + \varepsilon.$$

(iii) Für jeden $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, s.d. $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ gilt:

$$\mu(P) < \delta \Rightarrow A - \varepsilon \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) < A + \varepsilon$$

(iv) Für jeden $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$, s.d. für

jede Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I & $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$

gilt: $\forall k, x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, \mu(P) < \delta \Rightarrow |A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon$.

mit $|A - S(f, P, \xi)| = |A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})| < \varepsilon$.

Verständlicher: Eine beschr. Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau die

Zerlegung $Z_0 = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit den Stützstellen

$x_k = \frac{a+k}{n}$ für $k=0, \dots, n$. $\Rightarrow$ Feinheit: $\delta(Z_0) = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{a}{n}, k=1, \dots, n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(Z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0 \Rightarrow$ Konv. der R-Summe.

Satz: $\xi_k = x_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k], \int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} f(x_k) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^2}{n^2} \cdot \left(\frac{a+k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{3}$

Kor.: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschr. Fkt & integrierbar.

Sei $\{P^{(n)}\}$ eine Folge von Partitionen des Intervals $[a, b]$ mit $\mu(P^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ mit $\xi_k^{(n)} \in I_k^{(n)}$ zu Fkten

zur Partition $\{P^{(n)}\}$. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

Bem.: Wir bezeichnen die Menge aller R-Integrale

Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $R(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ R-integrierbar}\}$.

Bem.: (ZWS) Sei f stetig. $\forall y, m < y < M \exists \xi \in [x, x+1]$

s.d. $y = f(\xi)$.

Hauptsatz der Integralrechnung:

(A) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

Dann gilt $F'(x) = f(x)$, d.h. $F(x)$ ist Stammfkt von f .

(B) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei F eine beliebige Stammfkt

von f . Dann gilt: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Bem.: $F(x) = \int_a^{x^2+1} \sin^2(t) dt$. Ges: $F'(x) = ?$

$$G(x) := \int_0^{x^2+1} \sin^2(t) dt \xrightarrow{HWS} G'(x) = \sin^2(x), h(x) := x^2 + 1$$

$$\Rightarrow F(x) = G(h(x)) = \int_0^{h(x)} \sin^2(t) dt = \int_0^{x^2+1} \sin^2(t) dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = (G \circ h)'(x) \stackrel{\text{Chain rule}}{=} G'(h(x)) \cdot h'(x) = \sin^2(h(x)) \cdot (2x)$$

$$= [\sin^2(x^2+1)](2x) //$$

$$\text{Bsp: Sei } a > 0. \int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right\} = -\frac{1}{a} \quad \text{für } a < 0, b < 0$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \ln|b| - \ln|a| \right\} = 1 \quad \text{für } a < 0, b > 0$$

$$\text{Wallischen Produkt: } \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{Stirlingische Formel: } n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$\text{Logarithmusgesetz}$$

$$(i) x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x \quad (ii) \log(1) = 0$$

$$(iii) \log(x) + \log(y) = \log(xy) \quad (iv) -\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(v) \log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right) \quad (vi) n \cdot \log(x) = \log(x^n)$$

$$(vii) \log_b(r) = \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)}$$

$$\text{Bsp. (R-Integral): } f(x) = x^2, I = [0, a], a > 0.$$

Da f stetig, ist f R-integrierbar auf $[0, a]$. Wir betrachten

die Zerlegung $Z_0 = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit den Stützstellen

$x_k = \frac{a \cdot k}{n}$ für $k=0, \dots, n$. $\Rightarrow$ Feinheit: $\delta(Z_0) = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{a}{n}, k=1, \dots, n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(Z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0 \Rightarrow$ Konv. der R-Summe.

Satz: $\xi_k = x_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k], \int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} f(x_k) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^2}{n^2} \cdot \left(\frac{a \cdot k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{3}$

DGL'-Ergänzungen

DGL Lösungsmethoden:

(1) 1. Ordn., homogen:

Separation der Variablen

[...]

Da die vorkommende Integrale unbestimmt sind, enthält $y(x)$ eine Integrationskonst. C , welche man bei AWP aus den Anfangsbedingungen bekommt: $y(x_0) = y_0$

(2) 1. Ordn., inhomogen:

Variation der Konstanten

[...]

$$\Rightarrow C \rightarrow C(t)$$

$$\leadsto y_{\text{part}}(t) = C(t) f(t)$$

(nehme y_{hom} und ersetze C durch $C(t)$, leite ab. Danach setze y_{part} in DGL ein, es sollte sich viel wegstreichen!)

(3) Spezielle Substitutionen

(i) $y' = f(\frac{y}{x})$ subst. $\frac{y}{x} = \frac{y(x)}{x} = n(x)$
 $\Rightarrow y(x) = n(x) \cdot x$

[...]

(ii) [...] $\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$: Voraussetzung: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$

(iii) $y' = h(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f})$: Voraussetzung: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$

löse $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$ nach x, y auf.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

setze dann $z = y - y_0$ & $t = x - x_0$

Dabei wird y' einfach durch z' ersetzt, weil

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z+y_0)}{d(t+x_0)} = \frac{dz}{dt} = z'$$

Bsp.: $(x-2-y)y' = -4x+y+5$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4x+y+5}{x-2-y} = h\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$$

wobei $h(z) = z$, $a = -4$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 1$, $e = -1$, $f = -2$

$$\leadsto \det = 3 \neq 0 \checkmark$$

löse $\begin{cases} -4x+y+5=0 \\ x-2-y=0 \end{cases}$ nach $x, y_0 \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = -1$

$$\begin{cases} x-2-y=0 \\ \end{cases} \text{ setze } z = y+1 \\ t = x-1$$

$$\Rightarrow z' = \frac{-4x+y+5}{x-y-2} = \frac{-4(t+1)+(z-1)+5}{(t+1)-(z-1)-2}$$

wir haben nun ein DGL der Form (i)!

(ii) $y' = \frac{1}{x} h(xy)$

subst.: $z(x) = xy = x y(x) \Leftrightarrow y(x) = \frac{z(x)}{x}$

y' wird durch $y' = (xz' - z)/x^2$ ersetzt.

Bsp.: $y(xy+1) + xy' = 0$

$h(z) = z+1$ die Subst. sieht wie folgt aus:

$$z(x) = xy(x) \Leftrightarrow y(x) = z(x)/x^2$$

$$\leadsto y' = (xz' - z)/x^2$$

$$\text{ersetzen: } (xz' - z)/x^2 = -\frac{z}{x^2}(z+1)$$

$$\Rightarrow xz' - z = -z^2 - z \Rightarrow xz' = -z^2$$

Weiter mit Separation der Variablen.

(3) Bernoulli-DGL hat die Form: $y' = h(x)y + g(x)y^a$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

subst.: $z = y^{1-a} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-a}}$ ersetzt

Dabei wird y' durch $y' = \frac{1}{1-a} z^{-\frac{a}{1-a}} z'$ ersetzt.

Bsp.: $xy' - y = 2xy^2 \Rightarrow a = 2$

subst.: $z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{z} \leadsto y' = -\frac{z'}{z^2}$

Wir bekommen: $-x \cdot \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{2x}{z^2}$
 $\Rightarrow xz' - z = -2x \hat{=} \text{DGL 1. Ordn.}$

(3) Lin. DGL n-ter Ordn., homogen:

[...] $\lambda \in \mathbb{C}$

Bsp.: $y''' + y'' - y' - y = 0$, Euler-Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

Einsetzen: $\lambda^3 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$

char. polynom $\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

NST: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ alg. V. 2

$$\leadsto e^{-x}, x \cdot e^{-x}, e^x$$

λ_2 doppelt

Allg. Lsg.: $y(x) = A e^{-x} + B x e^{-x} + C e^x$

(A, B, C folgen aus Anfangsbedingungen)

Bsp. 2: Sei Allg. Lsg. $y(x) = A e^{(-2+i)x} + B e^{(-2-i)x}$

Unschön darum umschreiben mit Euler Formel für $\sin(x)$ & $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ etc.,

um den Term $A e^{ix} + B e^{-ix}$ als $\tilde{A} \cos(x) + \tilde{B} \sin(x)$

zuschreiben. $\tilde{A}$ & $\tilde{B}$ sind neue Integrationskonst. (mit Anfangsbed. bestimmen).

Math. Satz besagt, dass die Lsg einer reellen DGL (DGL mit reellen Koeff'n)

immer reell ist. Derwegen gilt für die Lsg

$$y(x) = \frac{y(x)}{y(x)}. \text{ Aus dieser Bedingung folgt:}$$

$$y(x) = e^{-2x} (A e^{ix} + B e^{-ix}) = \frac{y(x)}{y(x)} = e^{-2x} (\tilde{A} e^{-ix} + \tilde{B} e^{ix})$$

Daraus folgt $\tilde{A} = B$ bzw. $\tilde{B} = A$. Damit kann

man die Lsg $y(x)$ wie folgt umschreiben

$$y(x) = e^{-2x} (A e^{ix} + B e^{-ix})$$

$$= e^{-2x} (\operatorname{Re}(A) e^{ix} + \operatorname{Im}(A) e^{ix} + \operatorname{Re}(A) e^{-ix} - \operatorname{Im}(A) e^{-ix})$$

$$= e^{-2x} [\operatorname{Re}(A) (e^{ix} + e^{-ix}) + \operatorname{Im}(A) (e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$= e^{-2x} [\operatorname{Re}(A) \cdot 2 \cos(x) + \operatorname{Im}(A) \cdot 2i \sin(x)]$$

$$= e^{-2x} [2 \operatorname{Re}(A) \cos(x) - 2 \operatorname{Im}(A) \sin(x)]$$

$$= e^{-2x} (\tilde{A} \cos(x) + \tilde{B} \sin(x))$$

$$= e^{-2x} (\tilde{A} \cos(x) + \tilde{B} \sin(x))$$

$$= e^{-2x} (\tilde{A} \cos(x) + \tilde{B} \sin(x))$$

(8) DGL in $\mathbb{R}^n$

[...]

Exkurs Exponentialmatrix

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Fall 1: A ist diagonal $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\leadsto A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!}\right)$$

$$= \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Fall 2: A ist diag'bar $A = T D T^{-1}$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

wobei λ_i EW's von A & T aus EV's von A

$$\Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (T D T^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (T D^k T^{-1})$$

$$= T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k T^{-1} = T e^D T^{-1} = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}$$

Fall 3: komplexe EW Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

$$\leadsto A^2 = a^2 \mathbb{I} \leadsto A^{2n} = (a^2)^n \mathbb{I} \text{ & } A^{2n+1} = (a^2)^n A$$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2)^n}{(2n)!} \mathbb{I} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (a^2)^n A$$

$$= \mathbb{I} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2)^n}{(2n)!} + A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2)^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a^2}} \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a^2}) & \sinh(\sqrt{a^2}) \\ \sinh(\sqrt{a^2}) & \cosh(\sqrt{a^2}) \end{pmatrix}$$

$$(i) ab > 0: e^A = \frac{1}{\sqrt{a^2}} \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a^2}) & \sinh(\sqrt{a^2}) \\ \sinh(\sqrt{a^2}) & \cosh(\sqrt{a^2}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2}} \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a^2}) & \sinh(\sqrt{a^2}) \\ \sinh(\sqrt{a^2}) & \cosh(\sqrt{a^2}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2}} \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a^2}) & \sinh(\sqrt{a^2}) \\ \sinh(\sqrt{a^2}) & \cosh(\sqrt{a^2}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2}} \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a^2}) & \sinh(\sqrt{a^2}) \\ \sinh(\sqrt{a^2}) & \cosh(\sqrt{a^2}) \end{pmatrix}$$

(a): Banachscher Fixpunktsatz Fehlerabschätzung:

a-priori:

a-posteriori:

$$d(x^*, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad d(x^*, x_n) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$$

$$(ii) ab < 0: e^{\pm i\sqrt{a}x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{a})^{2n}}{(2n)!} + \frac{A}{\sqrt{a}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{a})^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\cos(\sqrt{a}|x|)} + \frac{\sin(\sqrt{a}|x|)}{\sin(\sqrt{a}|x|)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}|x|) & a/\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}|x|) \\ b/\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}|x|) & \cos(\sqrt{a}|x|) \end{pmatrix}$$

Fall 4: A obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

$\Rightarrow DN = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$, D & N kommutieren

$$\Rightarrow e^A = e^{D+N} = e^D e^N$$

$$\Rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m=2 \quad \underbrace{N^2}_{=0}$$

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k = N^0 + N^1 + \frac{1}{2} N^2 + \dots$$

$$= I + N = \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^A = e^D e^N = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & b e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

Fall 5: A ist nicht diag'bar $\Rightarrow$ JNF

Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alg. + geom. $\Rightarrow$ JNF

$\Rightarrow A = P B P^{-1}$, mit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, P besteht aus

JNF-Basis $\Rightarrow$ You know;

$\Rightarrow$ weiter mit Fall 4.

Lösung mittels Exponentialmatrix

Geg. lin., homogenes nxn System von DGL's

1. Ordn. mit konst. Koeff's: $\vec{y}' = A \vec{y}$.

$\Rightarrow$ Allg. Lsg ist geg. durch: $y(x) = e^{Ax} \vec{C}$

wobei: $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$ Integrationskonst. ist.

Spezialfall: $\vec{y}' = A \vec{y}$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$

$\Rightarrow y(x) = e^{Ax} \vec{y}_0$ ist Lsg.

$\Rightarrow e^{Ax}$ heißt Fundamentalmatrix.

$$(I) e^{A(s+t)} = e^{As} e^{At} \quad (III) (e^{As})^{-1} = e^{-As}$$

$$(II) \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \quad \text{Koeff's}$$

(10) Inhomogene Systeme v. DGL's 1. Ordn. mit konst.

$\Rightarrow$ Variation der Konstante:

$$y_{\text{hom}} = e^{Ax} \vec{C} \Rightarrow y_{\text{part}} = e^{Ax} \vec{C}(x)$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow \dots e^{Ax} \vec{C}(x) = b(x) \Rightarrow \vec{C}(x) = S(e^{Ax})^{-1} b(x)$$

$$\Rightarrow \vec{C}(x) = \int e^{-Ax} b(x) dx$$

Das Integral wird komponentenweise bestimmt.

(11) wie (10) aber mit NICHT konst. Koeff's

$$\vec{y}' = A \vec{y} \Rightarrow \vec{y}' = A(x) \vec{y}$$

$$e^{Ax} \Rightarrow \exp(SA(x)dx)$$

konst. Koeff. Nicht konst. Koeff.

$\Rightarrow$ partikuläre Lsg mit Variation der Konst.

(5) Eulersche DGL

[...]

$\Rightarrow$ der Grad ist erhalten.

Bsp: $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$, Ansatz: $y(x) = x^\lambda$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)x^\lambda + 3\lambda x^\lambda - 3x^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad B$$

$$NST: \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{Lsg: } y(x) = \frac{1}{|x|} A + \frac{1}{x^2} B$$

Schema:

(a) λ einfache reelle NST: $A|x|^\lambda$

(b) λ m-fach reelle NST: $A_1 x^\lambda, A_2 \log(|x|) x^\lambda, \dots, A_m (\log(|x|))^{m-1} x^\lambda$, m lin. unabh. Lsgen

(c) $\lambda = a \pm ib$ komplex: $A_1 x^a \sin(\log(x^b)), A_2 x^a \cos(\log(x^b))$

(d) $\lambda = a \pm ib$ m-fach: $\sin(\log(x^b)) \rightarrow A_1 x^a \sin(\log(x^b)), A_2 \log(|x|) x^a \sin(\log(x^b)), \dots, A_m (\log(|x|))^{m-1} x^a \sin(\log(x^b))$

$B_1 x^a \cos(\log(x^b)), B_2 \log(|x|) x^a \cos(\log(x^b)), \dots, B_m (\log(|x|))^{m-1} x^a \cos(\log(x^b))$

Banach: (a)

[...]

ein vollständiger metrischer Raum $\hat{=}$ eine Menge X versehen mit einer Metrik d, s.d. alle Cauchy-Folgen in X konvergieren.

Picard-Lindelöf (Cauchy-Lipschitz Thm)

Der Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard-Lindelöf ist eine Konsequenz des Banachschen Fixpunktsatz.

Def: (Picard-Lindelöf)

Es sei I ein kompakter Intervall, $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offener Intervall, $(x_0, y_0) \in I \times \Omega$ und $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Außerdem erfülle f die Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

wobei $L > 0$ eine Konst. Dann gibt es $\delta > 0$, s.d. das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lsg $y: I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ kann man $I_0 = I$ wählen.

$\Rightarrow$ Lipschitz-Bedingung muss erfüllt sein, damit eine eindeutige Lsg existiert!
Also prüfe zuerst L-Bedingung...

Riemannsche Summen

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Länge des Intervalls ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i=1, \dots, n$

Feinheit der Unterteilung: $\Delta_n = \max \Delta x_i, i=1, \dots, n$

In jedem der n Intervalle wählen wir einen Pkt aus: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n$

Wir definieren die Riemannsche Summe R_n von f bzgl. der Unterteilung Δx_i als:

$$R_n := \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot f(\xi_k).$$

Riemann-Integral $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$ existiert

$\Leftrightarrow f$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und Grenzwert als R-Integral von f auf $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi_k)$$

Reihen: Riemannsummen

$$[...] \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(x_k) =$$

$$= \int_0^1 f(x) dx.$$

Bekannte Integrale: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsinh(x) \Big|_0^1$

$$\arcsinh(0) = 0; \arctan(1) = \frac{\pi}{4}; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Die Länge einer Kurve

Falls eine reguläre Kurve (d.h. $\vec{r}' \neq 0 \forall t \in [a, b]$)

$$\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t)$$

vorgegeben ist, kann man die Länge von $\vec{r}$ mit der Formel: $L(\vec{r}) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$ berechnen.

Einfach zusammenhängende Mengen

Homotopien

Seien $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ & $\gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Kurven in $\mathbb{R}^n$ mit demselben Anfangspkt p und Endpkt q. Die zwei Kurven heißen

homotop ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn es eine stetige Abb.: $h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto h(t, s)$ gibt s.d. $h(t, 0) = \gamma_1(t), h(t, 1) = \gamma_2(t), \forall t \in [a, b]$ & $h(0, s) = p, h(1, s) = q \forall s \in [0, 1]$ gilt.



Die Abb. h heißt Homotopie zw. p_1 & p_2 .
Zwei Kurven heißen also homotop, wenn es eine Homotopie h zw. beiden gibt.

Einfach zusammenhängende Mengen

Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschl. Kurve in Ω zu einer konst. Kurve homotop ist. D.h. Ω ist einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in Ω zu einem Pkt zusammengezogen werden kann.

Kritische und reguläre Pkte

Der Fall $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar. Der Pkt $p_0 \in \Omega$ heißt kritischer Pkt (von f), falls $df(p_0) = 0$. Die Pkte in Ω , welche nicht krit. sind, heißen regulär.

Der allg. Fall $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Sei eine diff'bar Abb. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vorgegeben. So ist das Differential von f an der Stelle $p_0 \in \Omega$ eine $m \times n$ Matrix, also eine lin. Abb. $df(p_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\text{Rang}(df(p_0)) = \min\{m, n\}$.

Def.: (reguläre und krit. Pkte)

$p_0 \in \Omega$ heißt regulär, falls die Matrix $df(p_0)$ maximalen Rang besitzt. Ebe p_0 krit.

Extremwertprobleme (in mehreren Dimensionen)

Extremwertaufgaben in $\mathbb{R}^n$ ohne NB

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema in $\mathbb{R}^n$)
Ist $x_0 \in \Omega$ ein lokaler Extrempkt (Max/Min) von f , so gilt: $df(x_0) = 0$
d.h. x_0 ist ein krit. Pkt von f .

[Es müssen also partielle Ableitungen verschwinden, also $\partial x_i = 0$.]

⚠ krit. Pkte sind nur Kandidaten für Extrempkte, z.B. Sattelpkte sind keine Extrema.

Satz: (berprfen)

Es sei f wie oben. Ist $df(x_0) = 0$ und ist die Hesse-Matrix $\text{Hess}_f(f)(x_0)$ positiv oder negativ definit, s.d.

$x^T \text{Hess}_f(f)(x_0) x > 0$ resp. $< 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
so ist x_0 ein strikter lokaler Min. oder Max. von f .

Def.: (Hesse-M.) siehe Blatt 7, Bsp. auf Bl. 8.

Exkurs: pos./neg. def. Matrix

EW-Krit.:

- a) $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow$ Mat. pos. def.
- b) $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow$ Mat. neg. def.

Hurwitz-Krit.: $A_i = \det(\cdot)$

- a) $A_1 > 0, \dots, A_n > 0 \Leftrightarrow$ Mat. pos. def.
- b) $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots \Leftrightarrow$ Mat. neg. def.
- c) else indefinit

Extremwertaufgaben in $\mathbb{R}^n$ mit NB

[...]
oft ist es "gut" jede Gleichung nach einer der λ_i aufzulösen und die versch. λ_i 's gleich zu setzen.

Zwischenprüfung

2.b) [Konvergenz]

z.z.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\log(n) \cos(nx))$ konv. abs. $\forall x \in \mathbb{R}$
Bew.: Da $0 \leq \log(n)/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $D > 0$ mit $|\log(n)/n| \leq D$ für alle n . Es folgt, dass $|\log(n) \cos(nx)/n^2| \leq D \frac{1}{n^2}$ also num'bar ist. Damit konv. die Summe absolut.

z.z.: Die Summe ist durch $C > 0$ beschr.

Bew.: $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n) \cos(nx)}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\log(n) \cos(nx)|}{n^2} \leq D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =: C$

3.c) Sei $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Bestimme eine notwendige & hinreichende Bedingung (mit Beweis) an f da für, dann die Fkt

$$g(x) = \begin{cases} x \mapsto 0, & x > 1 \\ x \mapsto 1, & x < 0 \\ x \mapsto f(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Stokes' Theorem: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$

3D Gauss: $\iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint \text{div}(\vec{F}) dV$

Bew.: Wir zeigen, dass g genau dann stetig ist wenn $f(0) = 1$ & $f(1) = 0$. Sei g stetig. Dann gilt $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Analog $f(1) = 0$. Gelte nun $f(1) = 0$ & $f(0) = 1$. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Für $x > 1$ wähle $\delta = \frac{x-1}{2}$. Dann folgt aus $y \in]x-\delta, x+\delta[$, dass $y > 1$, also $0 = g(y) = f(y)$. Für $x < 0$ wähle $\delta = \frac{x}{2}$ und argumentiere analog. Für $x \in]0,1[$ wähle δ wie in Stetigkeit von f und zusätzlich so klein, dass $]x-\delta, x+\delta[\subset]0,1[$. Für $x = 0$ wähle δ wie in Stetigkeit von f . Es folgt $|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta$

Für $x = 1$ wähle auch δ wie in Stetigkeit von f und argumentiere analog.
d) Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Fkt.
z.z.: dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x + (1, \dots, 1))\}$ abgeschlossen ist
z.z.: $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1 - g(x^2)\}$ ist offen.

Bew. 1: definiere $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, stetig mit $x \mapsto h(x) := f(x) - g(x + (1, \dots, 1)) = 0$.
 $h(x)$ ist stetig, da f & g stetig sind.
 $\forall$ Umgebungen U von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in U\}$ (stetige Fkten erhalten die Topologie)
 $\Rightarrow h^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. [$\{0\}$ abgeschl.]
[Urbilder abgeschl. Mengen unter stetigen Abb. sind abgeschl.]

Bew. 2: definiere $k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto k(x) = f(x) - 1 + g(x^2) > 0$.
 $k(x)$ ist stetig, da $f, 1$ & g stetig sind.
 $\Rightarrow k^{-1}([0, \infty[)$ offen. $\square$

e) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Fkten, $f(0) = 1, g(1) = \frac{7}{8}$.

z.z.: $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta: f(x) > g(x^2)$

Bew.: definiere $h(x) = f(x) - g(x^2) > 0$ stetig mit $h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - g(1) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} > 0$

Verwende nun die Stetigkeit von h bei 0 mit $\varepsilon = \frac{1}{8}$. $\square$

f) Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$.

z.z.: $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \text{ falls } i \neq j\}$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

Green's Theorem: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}) dA$
2D Gauss: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\text{div}(\vec{F})) dA$

Keine Konvergenz: Es gibt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -per., und $x \in \mathbb{R}$, s.d. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $N \rightarrow \infty$

(Hinweis: Schreibe die Menge als Schnittmenge offener Mengen.)

Bew.: $f_{ij}(x) = x_i - x_j$ sind alle stetig. Also ist

$$U = \bigcap_{i,j} f_{ij}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

offen, da es ein endl. Durchschnitt offener Mengen ist.

$$4. n \geq 1, n \in \mathbb{Z}, N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n i \cdot |x_i|.$$

b) z.z.: $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1, a_2 > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$a_1 \|x\|_{\infty} \leq N(x) \leq a_2 \|x\|_{\infty}$$

Bew.: Es gilt:

$$N(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \sum_{i=1}^n \|x\|_{\infty} = n(n \|x\|_{\infty}) = n^2 \|x\|_{\infty}$$

$\Rightarrow$ Also $a_2 = n^2$.

$$\|x\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = N(x). \Rightarrow \text{Also } a_1 = 1. \quad \square$$

c) z.z.: $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N(x - (1, \dots, 1)) \leq 2\}$ ist abgeschl., beschr., konvexe Teilmenge.

Bew.: (i) abgeschl.:

definiere $h(x) = 2 - N(x - (1, \dots, 1))$, $h(x)$ stetig.

$\Rightarrow$ Also ist $K = h^{-1}([0, \infty])$ abgeschl.

(ii) konvex: Def.: (Konvexe Mengen)

Es sei V ein endl. dim. VR über $\mathbb{R}$. Teilmenge $C \subset V$ ist konvex $\Leftrightarrow$

$\forall x \in C, \forall y \in C$, die Strecke zw. x & y in V auch in C enthalten ist. $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1]: tx + (1-t)y \in C.$$

Für $x, y \in K$ und $\ell \in [0, 1]$ folgt:

$$\begin{aligned} N(\ell x + (1-\ell)y - 1) &= N(\ell(x-1) + (1-\ell)(y-1)) \\ &\leq N(\ell(x-1)) + N((1-\ell)(y-1)) \\ &= \ell N(x-1) + (1-\ell)N(y-1) \\ &= \ell N(x-1) + (1-\ell)N(y-1) \\ &\leq \ell 2 + (1-\ell)2 \\ &= 2\ell + 2 - 2\ell \\ &= 2 \end{aligned}$$

(iii) beschränkt:

Um die Beschränktheit zu prüfen können wir K verschieben, also $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N(x) \leq 2\}$ voraussetzen. Mit der Äquivalenz der N Norm zur $\|\cdot\|_{\infty}$ Norm folgt direkt, dass K beschränkt ist. $\square$

d) Es sei $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$

z.z.: N auf U diff'bar, aber bei 0 nicht diff'bar

Bew.: Diff'barkeit in U : Sei $x \in U$.

Dann gibt es ein $k_i \in \{0, 1\}$ mit $(-1)^{k_i} x_i > 0$. Dann

ist auch für y nahe x die Ungleichung

$(-1)^{k_i} y_i > 0$ wahr. Also ist für solche y

$$N(y) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k_i} y_i \text{ als Polynom diff'bar.}$$

$\Rightarrow$ Also ist N diff'bar bei x .

[Dad]: Sei $x \in U$. $N(x) = \sum_{i=1}^n i |x_i|$, definiere

$$k_i = \begin{cases} 0 & \text{s.d. } (-1)^{k_i} x_i > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(x) = \sum_{i=1}^n i (-1)^{k_i} x_i = \text{Polynom}$$

$\Rightarrow$ Polynome sind diff'bar also ist auch N diff'bar

Diff'barkeit in 0: Sei $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(x_0 + h e_j) - N(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h e_j)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n i |h e_j|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i |h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i}{h} \quad \Rightarrow \text{es existiert kein Limes, da } h^+ \rightarrow 0 \neq h^- \rightarrow 0.$$

$\Rightarrow N$ ist bei 0 nicht diff'bar. $\square$

5.b) $f, g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, zwei Fkten der Klasse C^2 ,

konvex mit $f(0) \geq 0, g(0) \geq 0, f'(0) \geq 0, g'(0) \geq 0$

z.z.: $f \cdot g$ ist konvex.

Bew.: $f'(x) = \int_0^x f''(t) dt + f'(0) \geq 0$ da f konvex.

Also $f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) \geq 0$. Genauso:

$g(x), g'(x) \geq 0$. Also ist $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'' \geq 0$

c) Was ist eine notwendige & hinreichende

Bedingung an eine Fkt $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ da für, auf

einem offenen Intervall, welches $x_0 \in \mathbb{R}$

enthält, konvex zu sein?

$\Rightarrow$ Falls $f \in C^2(I)$, dann ist f konvex $\Leftrightarrow$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. (Falls $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$ ist

streng konvex) hier ist $I = \mathbb{R}$.

Fourier-Reihen

Periodische Fkt: Sei $A > 0$ feste pos. Zahl.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode A

(A -periodisch) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x+A) = f(x)$. Damit

gilt für A -per. Fkt $f(x): f(x+nA) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Auch alle Vielf. von A , wie $2A, 3A$ sind Perioden

der Fkt $f(x)$.

Bsp.: $\cos, \sin$ sind 2π -periodisch, $\cos(\frac{2\pi}{A} \cdot x)$

und $\sin(\frac{2\pi}{A} \cdot x)$ sind A -periodisch, $\frac{2\pi}{A}$ ist

äquivalent zu $\frac{2\pi}{T} := \omega$ mit $A = T$ als Periodenlänge.

$\frac{A}{k}$ -periodisch: $\cos(\frac{2\pi k}{A} x)$ oder $\sin(\frac{2\pi k}{A} x)$ sind $\frac{A}{k}$

periodisch. $\Rightarrow$ Sie oszillieren $|k|$ -mal ($k \in \mathbb{Z}$) schneller

als $\cos(\frac{2\pi}{A} x)$. Wenn wir für $A = 2\pi$ wählen, kriegen

wir $\cos(kx)$ und somit alle 2π -per. Fkt von $\cos$.

Exponentialfkt: Diese ist auch A -periodisch:

$$x \mapsto \exp(i \frac{2\pi k x}{A}) = \cos(\frac{2\pi k}{A} x) + i \sin(\frac{2\pi k}{A} x).$$

Diese ist oft einfacher zu rechnen:

$$\exp(i \omega k (x+y)) = \exp(i \omega k x) \cdot \exp(i \omega k y)$$

Rechenregeln periodischer Fkten: f, g seien A -periodisch,

dann folgt: $f+g$ ist A -per.; $f-g$ ist A -per.; f' auch A -per.

Hingegen ist Integralfkt nur dann periodisch, wenn

$$\int_0^A f(x) dx = 0 \text{ gilt!}$$

Integral per. Fkten: $\int_c^{c+A} f(x) dx = \int_0^A f(x) dx = \int_{A/2}^{A/2+A} f(x) dx$

mit $f(x)$ A -periodisch.

Komplexe Fourier-Reihe: Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und 2π -per.,

gilt: $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N c_j e^{ijx} = f(x)$. Falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ ist

Konvergenz gleichmäßig.

Fourier-Koeffizienten c_j : Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -per.

und $j \in \mathbb{Z}$ ist $c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx$ ein Fourier Koeff.

von x . Um diese Formel zu finden benutzen wir orthog.

Eigenschaft: Wir suchen $c_m, m \in \mathbb{Z}$.

Man multipliziert Fourier-Reihe $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx} = f(x)$ auf

beiden Seiten mit e^{-imx} . Dann integriert man zw.

0 und 2π (und dividiert durch 2π)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx = c_m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx + \dots +$$

$$+ c_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imx} dx + \dots + c_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

$$\text{Aber: } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx = c_m$$

Orthogonalität: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$

Besselsche Ungleichung: für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, 2π -per. gilt

$$\text{Bessel Ugl.: für } N \geq 1 \text{ gilt: } \sum_{j=-N}^N |c_j|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Parseval Gleichungen: für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, 2π -per. gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N |c_j|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

$$\text{Ausserdem: } \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}} dx$$

(*) Prop.: Berechne die Reihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ bis auf
 einen Fehler $< 10^{-5}$
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n^4} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < 10^{-5}$
 Integralkrit. $\Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3(N+1)^3} < 10^{-5} \Rightarrow N \geq \sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot 10^{-5}}} - 1$