Lineare Algebra

1. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

October 2, 2019

1 Komplexe Zahlen

Bemerkung.
$z^2 + 1 = 0$ ist ein Beispiel für eine in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung. Um eine Lösung zu finden erweitern wir deshalb den Körper auf $\mathbb{R}^2$ und nennen dies **Körper** (engl. Field, wird in der diskreten Mathematik im 5. Kapitel *Algebra* genauer behandelt) **der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

Definition. (*imaginäre Einheit*)

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i &\mathrel{\hat{=}} \text{ die imaginäre Einheit} \end{aligned}$$

Definition. (*kartesische Form*)

$$z = x + iy$$

Definition. (*Real- und Imaginärteil*)

$$\begin{aligned} Re(z) &:= x \in \mathbb{R} & &\mathrel{\hat{=}} \text{ Realteil} \\ Im(z) &:= y \in \mathbb{R} & &\mathrel{\hat{=}} \text{ Imaginärteil} \end{aligned}$$

Definition. (*Konjugation*)
Die Konjugation von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei

$$\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}.$$

Die Konjugation hat die folgenden *Eigenschaften*:

(i) Für alle $z = x + iy = (x, y), z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt

- $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \|z\|^2$.

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Bemerkung.
Weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen. Sei $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt folgendes

(i) $\|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\|$

(ii) $\|\frac{z}{w}\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}, w \neq 0$

(iii) $\|z\| = \|\overline{z}\|$

(iv) $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

Definition. (*Euler Formel*)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Definition. (*Polarform*)
Die *Polarform* von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei (Achtung! $\varphi \in (-\pi, \pi]$)

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi}, \\ \overset{\text{Euler Formel}}{\Leftrightarrow} \quad z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ \text{mit} \quad r &= \|z\|, \\ x &= r\,\cos\varphi, \\ y &= r\,\sin\varphi. \end{aligned} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{undefiniert}, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Bemerkung.
Die Berechnung des Winkels φ' im Intervall $(0, 2\pi]$ kann im Prinzip so durchgeführt werden, dass der Winkel zunächst wie vorstehend beschrieben im Intervall $(-\pi, \pi]$ berechnet wird und, nur falls er negativ ist, noch um 2π vergrössert wird:

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi + 2\pi, & \varphi < 0 \\ \varphi, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Bemerkung.
Alternativ zu arctan kann die Berechnung von φ auch über den sinus und cosinus erfolgen:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{r} &\iff& \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \sin(\varphi) &= \frac{y}{r} &\iff& \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \end{aligned}$$

Bemerkung. (Ausblick).
$z^2+1 = 0$ ist ein Beispiel für eine in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung, die in $\mathbb{C}$ Lösungen hat (nämlich $z = \pm i$). Allgemein gilt der **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. Das heisst, $\mathbb{C}$ ist im Unterschied zu $\mathbb{R}$ **algebraisch vollständig**.

Beispiel 1:
Berechne: $\frac{6+7i}{3-8i}$

Lösung:

$$\frac{6+7i}{3-8i} = \frac{6+7i}{3-8i} \cdot \frac{3+8i}{3+8i} = \frac{18+21i+48i+56i^2}{9-64i^2} = \frac{18+21i+48i-56}{9+64} = \frac{-38+69i}{73}$$

Beispiel 2:
Berechne die Polarform von $z = 1 + i$.

Lösung:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow z &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Beispiel 3:
Berechne die kartesische Form von $7e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Lösung:

$$7e^{i\frac{\pi}{3}} = 7(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 7 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i$$

Beispiel 4:
Zeichnen Sie die folgenden Mengen grafisch in der komplexen Ebene:

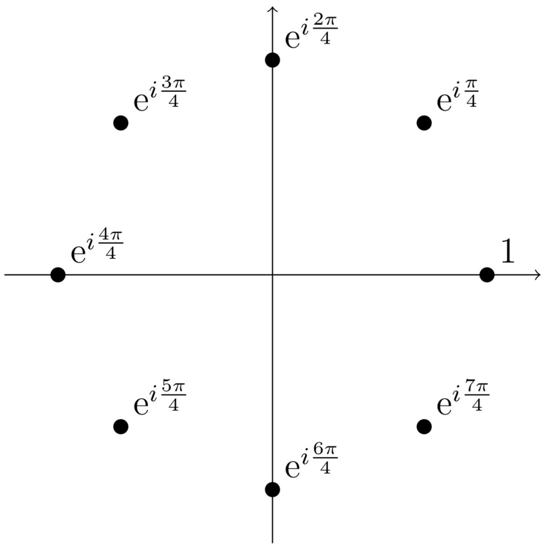
$$D := \left\{ n \in \mathbb{N} \quad : \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n \right\}$$

Lösung: In Polarkoordinaten gilt $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, also folgt

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

Weil $e^{i\theta} = e^{i\theta+2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ besteht D aus 8 Punkten, die für $n = 0, 1, 2, ..7$ gefunden werden:

$$D = \{1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{2\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{4\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{6\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$$

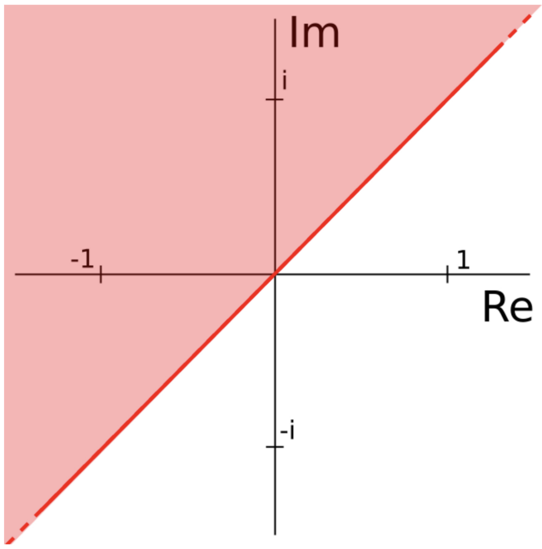


Beispiel 5:
Zeichnen Sie die folgenden Mengen grafisch in der komplexen Ebene:

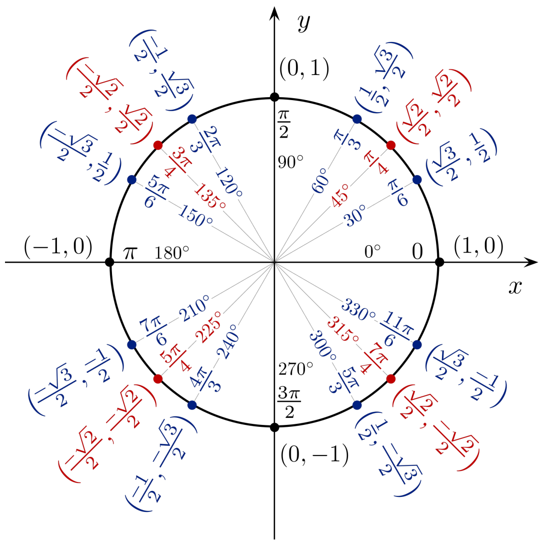
$$E := \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad \|z - i\| < \|z - 1\|\}$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&\|z-i\| < \|z-1\| \\
\iff\quad & \|z-i\|^2 < \|z-1\|^2 \\
\iff\quad & \|x+iy-i\|^2 < \|x+iy-1\|^2 \\
\iff\quad & \|x+i(y-1)\|^2 < \|(x-1)+iy\|^2 \\
\overset{z\bar{z}=x^2+y^2}{\iff}\quad & x^2+(y-1)^2 < (x-1)^2+y^2 \\
\iff\quad & x^2+y^2-2y+1 < x^2-2x+1y^2 \\
\iff\quad & y > x
\end{aligned}
$$



Bemerkung: (sollte auf eure Zusammenfassung für die Prüfung)
Im folgenden sieht ihr "schöne" Cosinus- und Sinuswerte auf dem Einheitskreis, wobei die x-Richtung $\cos(x)$ und die y-Richtung $\sin(x)$ entspricht:



Bemerkung. *Mitternachtsformel* (auswendig)

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Beispiel 6:
Finde alle Lösungen zu der folgenden Gleichung:

$$
z^2 - 2\left(\sqrt{3}i + e^{i\pi}\right) = 0 \tag{1}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& z^2 - 2\left(\sqrt{3}i + e^{i\pi}\right) = 0 \\
\overset{e^{i\pi}=-1}{\iff} \quad & z^2 - 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 0 \\
\iff \quad & z^2 = 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) \\
\iff \quad & z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \\
\iff \quad & z^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\overset{\text{polar Form und Euler Formel}}{\iff} \quad & \left(re^{i\vartheta}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
\iff \quad & r^2 e^{2i\vartheta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & r = \sqrt{4} = 2 \\
\Longrightarrow \quad & 2\vartheta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
\iff \quad & \vartheta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)} \qquad \text{for} \quad k = 0, 1 \\
\iff \quad & z = \left\{2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} \\
\iff \quad & z = \left\{1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\right\}
\end{aligned}
$$

2 MATLAB

Wenn ihr eine Funktion habt, aber nicht sicher seid, was es als Input benötigt oder was es zurück gibt könnt ihr das wie folgt herausfinden:

- Im Matlab Command Window mit: `help <name>` oder `doc <name>`
- Sonst könnt ihr auch Google benutzen.

Beispiel 7: Lucas-Zahlen

- **Definition**

$$L_n := \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2}, & n > 1 \end{cases}$$

  So erhalten wir die Folge: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$

- **Aufgabe**
  Schreibe eine Matlab-Funktion **lucas(n)**, die zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl n die Lucas-Zahlen $L_0, \ldots, L_n$ berechnet.