Lineare Algebra

2. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

October 2, 2019

1 Erinnerung

Definition. (*Euler Formel*)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Definition. (*Polarform*)
Die *Polarform* von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei (Achtung! $\varphi \in (-\pi, \pi]$)

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi}, \\ \overset{\text{Euler Formel}}{\Leftrightarrow} \quad z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ \text{mit} \quad r &= \|z\|, \\ x &= r\ \cos\varphi, \\ y &= r\ \sin\varphi. \end{aligned} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \land y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \land y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \land y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \land y < 0 \\ \text{undefiniert}, & x = 0 \land y = 0 \end{cases}$$

Bemerkung.
Die Berechnung des Winkels φ' im Intervall $(0, 2\pi]$ kann im Prinzip so durchgeführt werden, dass der Winkel zunächst wie vorstehend beschrieben im Intervall $(-\pi, \pi]$ berechnet wird und, nur falls er negativ ist, noch um 2π vergrössert wird:

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi + 2\pi, & \varphi < 0 \\ \varphi, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Bemerkung.
Alternativ zu arctan kann die Berechnung von φ auch über den sinus und cosinus erfolgen:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{r} & \iff \qquad & \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \sin(\varphi) &= \frac{y}{r} & \iff \qquad & \varphi = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \end{aligned}$$

2 Lineare Gleichungssysteme LGS

Der allgemeine Fall hat m lineare Gleichungen, n Unbekannte und stellt ein LGS dar. Falls

$$\begin{aligned} m &> n, && \text{dann ist das LGS überbestimmt (numerisch lösbar)} \\ m &< n, && \text{dann ist das LGS unterbestimmt (analytisch lösbar)} \\ m &= n, && \text{sonst (analytisch lösbar)} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A \mathrel{\widehat{=}}$ Koeffizientenmatrix, $x \mathrel{\widehat{=}}$ Unbekanntenvektor, $b \mathrel{\widehat{=}}$ Lösungsvektor (RHS)

Lösungsansatz: **Gauss-Elimination**

Bemerkung. Für ein LGS gilt jeweils eines der folgenden Punkte: Es besitzt

- genau eine Lösung, dann nennt man es ein *reguläres* LGS
- keine Lösung, dann nennt man es ein *singuläres* LGS
- ∞ viele Lösungen, dann nennt man es ebenfalls ein *singuläres* LGS

Kochrezept: Gauss-Elimination

Gegeben: LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (für $m < n \vee m = n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1. Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(A \mid \boldsymbol{b}\right).$$

2. Bringe $\left(A \mid b\right)$ durch Operationen der Art (I), (II), (III) in folgende Form (Zeilenstufenform, d.h. es muss nicht umbedingt die Einheitsmatrix ergeben!):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & x_n \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbb{1} \mid \boldsymbol{x}\right), \text{ wobei } \mathbb{1} \mathrel{\widehat{=}} \text{Einheitsmatrix}$$

(I) Zeilen vertauschen

(II) Addition/Subtraktion von einer Zeile (Gleichung) zu einer anderen

(III) Ver-k-fachen einer Zeile (Gleichung) mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. Am besten geht das, wenn ihr das folgende Verhältnis bildet (dies werden wir später nochmals brauchen!)

$$l_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

und dies folgend nutzt

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{RHS} \end{array} \\ \begin{array}{c} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \end{array} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} - l_{21}a_{11} & a_{22} - l_{21}a_{12} & a_{23} - l_{21}a_{13} & b_2 - l_{21}b_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \widetilde{b_2} \\ a_{31}-l_{31}a_{11} & a_{32}-l_{31}a_{12} & a_{33}-l_{31}a_{13} & b_2-l_{31}b_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & \widetilde{b_2} \end{array}\right) \ldots$$

Beispiel 1:
Löse das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 8 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 8 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{6}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{14}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{(-2)}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (*)$$

In der 3. Zeile gibt es nur Nullen $\Rightarrow \infty$ viele Lösungen.
Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 2. Zeile:

$$x_3 = -1$$

Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile:

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Wähle z.B. $x_2 = t \in \mathbb{R}$ als freien Parameter

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung.
Falls wir statt $(*)$ z.B.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

erhalten hätten, gäbe es keine Lösung, weil in der 3. Zeile $0 = 2$ steht, was bekanntlich einen Widerspruch darstellt.

Beispiel 2:
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende homogene lineare Glei-chungssystem eine nichttriviale (von 0 verschiedene) Lösung?

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - x_3 &= 0 \\ a^2x_1 + 2ax_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - x_3 &= 0 \\ a^2x_1 + 2ax_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -10 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & a & -1 \\ a^2 & 2a & -10 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ a^2 & 2a & -10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 0 & 2a & a^2-10 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$$

1. Fall: $x_3 \neq 0$
   Die 3. Zeile gibt uns

   $$(a^2-4)x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$$

   Wir wählen $x_3 =: s$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als freien Parameter.
   Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 2. Zeile

   $$ax_2 - 3s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax_2 = 3s \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{3s}{a}$$

   Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile

   $$x_1 - s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = s$$

   Somit sind wir bereits bei der Lösung von diesem Fall angelangt:

   $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ \frac{3s}{a} \\ s \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a = \pm 2 \right\}$$

2. Fall: $x_3 = 0$
   Somit macht die 3. Zeile keine Aussage über a. Also müssen wir auf die 2. Zeile ausweichen.

   $$ax_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_2 - 3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee x_2 = 0$$

   (a) a $= 0$, $x_2 \neq 0$:
   Wir wählen $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als freien Parameter. Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile $x_1 = 0$. Somit erhalten wir die Lösung:

   $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a = 0 \right\}$$

(b) $x_2 = 0$: Somit folgt aus der 1. Zeile: $x_1 = 0$

Dieser Fall liefert nur die triviale Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und kann ausgeschlossen werden.

Insgesamt folgt also, dass wir für $a \in \{-2, 0, 2\}$ nichttriviale Lösungen erhalten.

3 Matrizen und Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Definition.
Die im folgenden Bild eingekreisten Elemente heissen *Pivotelement* oder kurz Pivot.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_{n_1} & \cdots & x_{n_2} & \cdots & \cdots & x_{n_r} & x_{n_r+1} & \cdots & x_n & 1 \\
\hline
a_{1,n_1} & \cdots & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & \cdots & a^{(1)}_{2,n_2} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & & a^{(r-1)}_{r,n_r} & * & \cdots & * & c_r \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Definition. *Pivotisierung*
Pivotisiere in der aktuellen Spalte j, d.h. bestimme den Index $i_p \in \{j, j+1, ..., n\}$ mit $|a_{i_p j}| = \max\limits_{i \in \{j, j+1, \ldots, n\}} |a_{ij}|$.

Definition.
In der Zeilenstufenform (ZSF) des Systems heisst die Anzahl $r \in \mathbb{N}$ der Pivotelemente der ***Rang*** der Matrix A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ und des Gleichungssystem, d.h.

$$\text{Rang}(A) := r \mathrel{\widehat{=}} \#\ \text{Pivotelemente}.$$

Bemerkung.
Sei die Matrix A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Rang $r \in \mathbb{N}$, dann gilt

(i) $r \leq \min\{m, n\}$,

(ii) $k - r \mathrel{\widehat{=}} \#$ *freie Parameter*, mit $k \in \min\{m, n\}$.

Beispiel zu (ii):

$m < n$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{Rang}(A) = 3$$

Hier sieht man, dass der Rang nicht mehr als 3 sein kann, da die maximal mögliche Anzahl Pivotelemente gleich 3 ist.

$m > n:$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{Rang}(B) = 3$$

In diesem Fall ist die letzte Zeile linear abhängig, d.h. mit den ersten drei Zeile können wir die Letzte zu Nullzeile umwandeln. Somit ist auch hier die maximal mögliche Anzahl Pivotelemente gleich 3.

Rechenregeln:
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ und sei $B, C \in \mathbb{E}^{n\times n}$ mit $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^H)$

(ii) $\text{Rang}(B) + \text{Rang}(C) - n \leq \text{Rang}(BC) \leq \min\{\text{Rang}(B), \text{Rang}(C)\}$

Definition.
Sei das folgende lineare Gleichungssystem (LSG) gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
x_{n_1} & \cdots & x_{n_2} & \cdots & \cdots & x_{n_r} & x_{n_r+1} & \cdots & x_n & 1 \\
\hline
a_{1,n_1} & \cdots & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & \cdots & a^{(1)}_{2,n_2} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & & a^{(r-1)}_{r,n_r} & * & \cdots & * & c_r \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_m
\end{array}$$

Die im Falle $m > r$ für die Exstenz einer Lösung notwendigen Bedingungen

$$c_{r+1} = c_{r+2} = ... = c_m = 0$$

sind die *Verträglichkeitsbedingung* des LGS.

Definition einer *Matrix* A $\in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} m \mathrel{\widehat{=}} \text{Zeilen} \\ n \mathrel{\widehat{=}} \text{Spalten} \end{array}$$

Bemerkung.
Falls $m = n$, dann heisst die Matrix A *quadratisch*.

Rechnen mit Matrizen.
Sei ein Skalar (Zahl) $\alpha \in \mathbb{R}$, seien die Matrizen A,B $\in \mathbb{R}^{m\times n}$ und C $\in \mathbb{R}^{n\times p}$, dann gilt

- Addition: $(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij}$

- **Matrixmultiplikation:** $(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (C)_{kj}$

  Die resultierende Matrix AC ist eine $m \times p$ Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} & (AC)_{ij} = a_{i1}c_{1j} + \cdots + a_{in}c_{nj} & \\ & & \end{pmatrix}$$

- **Erinnerung:** Skalarprodukt (Dotproduct)

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad a \cdot b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Beispiel 3:
Berechne AB mit den gegebenen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + -3 \cdot 1 + 5 \cdot -2 & 2 \cdot 5 + -3 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + -2 \cdot 2 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matlab:
Nun kontrollieren wir das ganze mit Hilfe von Matlab.
Wir befinden uns im *Command Window*:

```
% erstelle die Matrix A und B
>> A = [2 -3 5; 1 0 2];
>> B = [0 5; 1 1; -2 0];
% fuehre die Multiplikation aus
>> A*B
ans =
        -13        7
        -4         5
```

Spielen wir noch etwas mit Matlab damit ihr alle nötigen Funktion kennt, um selbst zu überprüfen, ob ihr Fehler gemacht habt.
Angenommen ihr wollt $(AB)^T = B^T A^T$ berechnen, ohne die Matrizen von hand zu transponieren:

```
% erstelle die Matrix A und B
>> A = [2 -3 5; 1 0 2];
>> B = [0 5; 1 1; -2 0];
% fuehre die Multiplikation aus
>> (A*B)'
ans =
        -13     -4
        7       5
>> B'*A'
ans =
        -13     -4
        7       5
% erstelle eine 3-dim. Einheitsmatrix
>> einheitsmatrix = eye(3);
```

Bemerkung.
Es gelten für die Matrixmultiplikation die gängigen Rechenregeln (Assoziativität, Distributivität). AUSSER ~~Kommutativität~~ **!!!** ($AB \neq BA$) !!!!!

Definition.
Sei A einen *relle* $m \times n$ - Matrix. Die $n \times m$ - Matrix A^T mit $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ heisst die zu A ***transponierte*** Matrix.

Definition.
Sei A einen *komplexe* $m \times n$ - Matrix. Die $n \times m$ - Matrix A^H mit $A^H = (\overline{A})^T = \overline{A^T}$ heisst due zu A ***hermitesch*** oder *konjugiert-transponierte* Matrix.

Bemerkung. (Eigenschaft von transponiert bzw. hermitesch)
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt
$(AB)^H = B^H A^H$ (bzw. $(AB)^T = B^T A^T$).

Beispiel 4:
Berechne A^H der gegebenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & -5 \\ i & 15-7i \\ 0 & 0.5i \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & -5 \\ i & 15-7i \\ 0 & 0.5i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^H = \begin{pmatrix} 3-2i & -i & 0 \\ -5 & 15+7i & -0.5i \end{pmatrix}$$

Definition.
Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{E}$ nennt man ***nilpotent***, wenn einer ihrer Potenzen die Nullmatrix ergibt:

$$A^k = \mathbf{0} \text{ für das kleinste } k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung.
Wenn die untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{E}$ gleich Null ist, dann handelt es sich um eine nilpotente Matrix.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad L^k = \mathbf{0} \text{ für ein } \ k \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 5:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad A^3 = \mathbf{0}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad B^2 = \mathbf{0}$$