Lineare Algebra

4. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

October 17, 2019

1 Invertierbare Matrizen

Definition.
Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ heisst ***invertierbar***
$\iff \exists! B \in \mathbb{E}^{n\times n}$, so dass $AB = BA = \mathbb{1}$.

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widehat{=} \text{ Einheitsmatrix}$$

B heisst dann *Inverse* von A und wird meistens mit $B = A^{-1}$ bezeichnet.

Eigenschaften:
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt:

(i) Falls A^{-1} existiert, dann ist A^{-1} eindeutig

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv) $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

(v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Definition.
Für eine 2×2 Matrix kann man die folgende Definition für die Berechnung der Inverse benutzten.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definition.
Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ heisst *symmetrisch/hermitesch*, falls gilt: $\quad A = A^H$.

Bemerkung.
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt
$(AB)^H = B^H A^H$ (bzw. $(AB)^T = B^T A^T$).

Satz.
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar} &\iff A \text{ ist regulär} \\ &\iff \forall b \in \mathbb{E}^n,\ \text{LGS } Ax = b: \quad \exists! x \in \mathbb{E}^n \text{ s.d.} \quad x = A^{-1}b \\ &\iff \text{Rang}(A) = n \quad (\text{"}A \text{ hat voller Rang"}) \end{aligned}$$

Definition.
Ist m eine beliebige natürliche Zahl, $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{E}$ und $A \in \mathbb{E}^{m \times m}$, so nennt man die Matrizen $P_{ij}, S_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in \mathbb{E}^{m \times m}$ *Elementarmatrizen.*

(i) Zeile i mit Zeile j vertauschen, multipliziere von links die *Permutationsmatrix* $P_{ij}A$:

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{-te Spalte} & & & & j\text{-te Spalte} & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Bemerkung: Für Permutationsmatrizen gilt: $P_{ij}^T = P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

(ii) Zeile i mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren, multipliziere von links $S_i(\lambda)A$:

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & i\text{-te Spalte} & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(iii) Zeile i durch (Zeile $i + \lambda \cdot$ Zeile j) erstetzten, multipliziere von links $E_{ij}(\lambda)A$:

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{-te Spalte} & & & & j\text{-te Spalte} & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 &&&& \lambda &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Bemerkung.
Oben haben wir gesehen wie man Zeilenumformungen mit Links-Multiplikation von Elementarmatrizen macht. Wenn wir nun $P_{ij}, S_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in \mathbb{E}^{m\times m}$ von rechts multiplizieren, z.B. AP_{ij}, dann erhalten wir *Spaltenumformungen*.

Kochrezept: Berechnung der Inverse
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$
Gesucht: A^{-1}

1. Schreibe das Schema $(A|\mathbb{1})$
2. Forme A mit Hilfe von Gauss-Elimination in die Einheitsmatrix um
   $(A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (\mathbb{1}|A^{-1})$
3. Teste $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$

Bemerkung.
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1:
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: A^{-1}

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{1}{1}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{6}{1}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{2}{1/3}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)\cdot 3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Orthogonale und unitäre Martrizen

Definition.
Eine komplexe $n \times n$ - Matrix A heisst ***unitär***, falls $A^H A = AA^H = \mathbb{1}$.
Eine reelle $n \times n$ - Matrix A heisst ***orthogonal***, falls $A^T A = AA^T = \mathbb{1}$.

Satz.
Sind $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$ unitäre (bzw. orthogonale) Matrizen, so gilt:

(i) A ist regulär

(ii) $A^{-1} = A^H$ (bzw. $A^{-1} = A^T$)

(iii) A^{-1} ist unitär (orthogonal)

(iv) AB ist unitär (orthogonal)

Definition.
Das *Kronecker-Delta* ist definiert durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Definition. *Einheitsvektoren*

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5:

- $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$
- $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

Definition *Orthonormal*
Seien $a, b \in \mathbb{E}^n$. Die Vektoren a, b sind orthonormal, falls folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Vektoren sind normiert, also es gilt:

$$\|a\| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \|b\| = 1.$$

(ii) Die Vektoren sind orthogonal, also es gilt:

$$\langle a, b \rangle = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

Bemerkung.
Für eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit der Form $A = (a_1|...|a_n)$ sind die Spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$ paarweise orthonormal.