Lineare Algebra

5. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

October 23, 2019

1 LR-Zerlegung (engl. LU decomposition)

Idee.
Bei grossen Gleichungssystemen $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und $b, x \in \mathbb{E}^n$ ist die Lösung x meist nicht einfach zu finden. Daher wollen wir A gerne in eine einfachere Form von Dreiecksmatrizen zerlegen, d.h.
Wir suchen Matrizen $P, L, R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ so dass $PA = LR$,

$$\begin{aligned} P \mathrel{\widehat{=}}\ & \text{ist eine } \textit{Permutationsmatrix} \text{ (enthält nur 1 und 0)} \\ L \mathrel{\widehat{=}}\ & \text{ist eine } \textit{linke Dreiecksmatrix} \text{ (engl. lower triangular matrix)} \\ R \text{ (engl. } U) \mathrel{\widehat{=}}\ & \text{ist eine } \textit{rechte Dreiecksmatrix} \text{ (engl. upper triangular matrix)} \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
Seien $A, P, L, R \in \mathbb{E}^{n\times n}$. P speichert die Zeilenvertauschungen, die man für die Pivotisierung braucht, L speichert die Umformungsschritte, um A eine Zeilenstufenform zu verwandeln, R ist die Zeilenstufenform von A.

Bemerkung.
Seien $A, P, L, R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und $b, c, x \in \mathbb{E}^n$. Das anfänliche System $Ax = b$ lässt sich nun einfacher lösen:

1. Löse $Lc = Pb$ nach c durch *Vorwärtseinsetzen*, d.h. $(L|Pb)$ von oben nach unten "Gaussen".
2. Löse $Rx = c$ nach x durch *Rückwärtseinsetzen*, d.h. $(R|c)$ von untern nach oben "Gaussen".

Bemerkung.
Dass die Beziehung aus der obigen Bemerkung für $A, P, P^{-1}, L, R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ die richtige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n$ liefert, sieht man auch daraus, dass

$$A\boldsymbol{x} = P^{-1}PA\boldsymbol{x} = P^{-1}LR\boldsymbol{x} = P^{-1}L\boldsymbol{c} = P^{-1}P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Satz.
Für eine reguläre, quadratische Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ existiert eine LR-Zerlegung, d.h.

$$\exists P, L, R \in \mathbb{E}^{n\times n}: \quad PA = LR.$$

LR-Zerlegung light (d.h. *ohne* Pivotisierung):
Annahme: keine Zeilenvertauschungen nötig und A hat keine Nullspalte
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$
Gesucht: $L \in \mathbb{E}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ so dass gilt: $A = LR$

1. Schreibe das Schema $(A|\mathbb{1})$
2. Forme A mit Hilfe von Gauss-Elimination (OHNE Zeilenvertauschungen!) um bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt. Dies tut ihr alles nur auf der linken Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix.
3. Auf der rechten Seite schreibt ihr die Verhältnisse auf:

$$l_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Schritte sehen wie folgt aus:

$$(A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (R|L)$$

mit mehr Details:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(ii)-l_{21}\cdot(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} - l_{21}a_{11} & a_{22} - l_{21}a_{12} & a_{23} - l_{21}a_{13} & l_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(iii)-l_{31}\cdot(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} - l_{31}a_{11} & a_{32} - l_{31}a_{12} & a_{33} - l_{31}a_{13} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \cdots \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} & l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} \end{pmatrix} = LR$$

Beispiel 1:
Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 129 \\ 109 \end{pmatrix}$$

(i) Gesucht: $L, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \quad A = LR.$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LR.$$

(ii) Gesucht: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$

Lösung:
Wie gehen vor, wie in der Bemerkung ganz oben auf der Seite 4 vorgeschlagen:

1. Löse $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 3 & 1 & 0 & 129 \\ 2 & 1 & 1 & 109 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{3}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 1 & 1 & 109 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{2}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-\frac{1}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 35 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. Löse $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 35 \\ 0 & 2 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{2}{3}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 35 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{4}{3}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{2}{2}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(ii)\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(iii)\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

LR-Zerlegung full (d.h. *mit* Pivotisierung):
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
Gesucht: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{E}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ so dass gilt: $PA = LR$

1. Schreibe das Schema $(\mathbb{1}|A|\mathbb{1})$. Links merkt ihr euch die Zeilenvertauschungen, in der Mitte "Gausst" ihr und rechts merkt ihr euch die Verhältnisse.

2. Pivotisiere in der aktuellen Spalte j, d.h. bestimme den Index $i_p \in \{j, j{+}1, ..., n\}$ mit $|a_{i_p j}| = \max\limits_{i \in \{j, j+1, \ldots, n\}} |a_{ij}|$. Falls $|a_{i_p j}| = 0$ breche ab, es existiert keine LR-Zerlegung.

   Sonst berechne $P_{ij}A = \widetilde{A}$ in der Mitte, wobei $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von links an die Matrix links im Schema multipliziert wird und auf der rechten Seite müsst ihr entsprechend die Verhältnisse vertauschen (ausser im ersten Schritt).

   - Falls zu Beginn pivotisieren müsst, sieht das Resultat vom Schritt wie folgt aus:
     $(\mathbb{1}|A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow (P_{ij}|\widetilde{A}|\mathbb{1})$
   - Sonst, sieht das Resultat vom Schritt wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{pivotisiere}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Forme A mit Hilfe von Gauss-Elimination (OHNE Zeilenvertauschungen!) um bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt. Dies tut ihr alles nur auf der linken Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix.
   Taucht bei der Berechnung wieder ein Nulleintrag auf in der Hauptdiagonale, dann müsst ihr wieder pivotisieren, also wiederholt den zweiten Schritt. Dann weiter "Gaussen".

4. Auf der rechten Seite schreibt ihr die Verhältnisse auf:

$$l_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Schritte sehen wie folgt aus:

$$(\mathbb{1}|A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (P|R|L)$$

mit mehr Details:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{21}-l_{21}a_{11} & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{21}a_{13} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31}-l_{31}a_{11} & a_{32}-l_{31}a_{12} & a_{33}-l_{31}a_{13} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{pivotisiere}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & 1 & 0 \\ l_{21} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{23}} \end{pmatrix} = LR$$

Beispiel 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -86 \\ -29 \end{pmatrix}$$

(i) Gesucht: $L, P, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \quad PA = LR.$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{pivotisiere:}P_{21}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{pivotisiere:}P_{32}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = LR$$

(ii) Gesucht: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$

Lösung:

Wie gehen vor, wie in der Bemerkung ganz oben auf der Seite 4 vorgeschlagen:

1. Löse $L\boldsymbol{c} = P\boldsymbol{b}$:

$$P\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ -86 \\ -29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -86 \\ -29 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 & 40 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{-1/2}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{1/8}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -86 \\ -29 \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

2. Löse $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -16 & -86 \\ 0 & 8 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{-17}{1/8}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -16 & -86 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{-16}{1/8}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)\cdot(-\frac{1}{6})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(ii)\cdot\frac{1}{8}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(iii)\cdot 8}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

2 Vektorräume

Definition.
Eine Menge $\mathbb{E}$ zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +:&\quad \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}, \quad (x,y)\mapsto x+y && \text{(Addition)}\\ \cdot:&\quad \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}, \quad (x,y)\mapsto x\cdot y && \text{(Multiplikation)}\end{aligned}$$

heisst *Körper*, wenn $\forall x,y,z\in\mathbb{E}$ folgendes gilt:

K1 $\mathbb{E}$ zusammen mit der Addition $+$ ist eine abelsche Gruppe.
(Ihr neutrales Element wird mit 0, das zu $a\in\mathbb{E}$ inverse Element mit $-a$ bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8: $\langle\mathbb{E};+\rangle$ is an abelian group):

- **(i)** (Assoziativität) $\quad (x+y)+z=x+(y+z)$
- **(ii)** (Neutrales Element) $\quad \exists e\in\mathbb{E}: \quad x+e=e+x=x$
- **(iii)** (Inverses Element) $\quad \exists x'\in\mathbb{E}: \quad x+x'=x'+x=e$
- **(iv)** (Abelsch $\Leftrightarrow$ Kommutativität) $\quad x+y=y+x$

K2 Bezeichnet $\mathbb{E}^*:=\mathbb{E}\setminus\{0\}$, so gilt für $x,y\in\mathbb{E}^*$ auch $x\cdot y\in\mathbb{E}^*$, und $\mathbb{E}^*$ zusammen mit der so erhaltenen Multiplikation ist eine abelsche Gruppe.
(Ihr neutrales Element wird mit 1, das zu $x\in\mathbb{E}^*$ inverse Element mit x^{-1} oder $1/x$ bezeichnet. Man schreibt $y/x=x^{-1}y=yx^{-1}$.
Vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8: $\langle\mathbb{E};\cdot\rangle$ is an abelian group)

(vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: Definition 5.26 und Theorem 5.23)

Bemerkung.
Meistens werden wir mit den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten. Ein weiterer Körper der für uns Informatiker bekannt ist, ist der kleinste endliche Körper $\mathbb{Z}_2$, der nur $\{0,1\}$ enthält.

Definition.
Ein *Vektorraum* V über $\mathbb{E}$ (oder auch $\mathbb{E}$-Vektorraum; VR) ist eine ist einen nichtleere Menge V zusammen mit zwei Operationen:

$$\begin{aligned} +:&\quad V\times V\to V, \quad (x,y)\mapsto x+y && \text{(Addition)}\\ \cdot:&\quad \mathbb{E}\times V\to V, \quad (\alpha,x)\mapsto \alpha y && \text{(Skalarmultiplikation)}\end{aligned}$$

so dass $\forall x,y,z\in V$ und $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{E}$ gilt:

V1 V zusammen mit der Addition ist eine abelsche (kommutative) Gruppe (das neutrale Element heißt Nullvektor, es wird mit $\mathbf{0}$, und das Negative wird mit $-x$ bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: $\langle V;+\rangle$ is an abelian group):

- **(i)** (Assoziativität) $\quad (x+y)+z=x+(y+z)$
- **(ii)** (Neutrales Element) $\quad \exists e\in V: \quad x+e=e+x=x$
- **(iii)** (Inverses Element) $\quad \exists x'\in V: \quad x+x'=x'+x=e$
- **(iv)** (Abelsch $\Leftrightarrow$ Kommutativität) $\quad x+y=y+x$

V2 Die Multiplikation mit Skalaren muss in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:

(i) (Distributivität I) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ii) (Distributivität II) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(iii) (Assoziativität) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(iv) (Verträglichkeit mit 1) $1x = x$

Beispiel 3:

1. n-dimensionale Vektoren bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.
2. $m \times n$-Matrizen bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.
3. $\mathcal{P}_n := \{$Polynome in einer Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{E}$ von max. Grad $n\}$ bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.

Definition.
Sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$, $U \neq \{\}$. U hiesst *Untervektorraum*, Unterraum, linearer Teilraum (UVR), falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. wenn $\forall x, y \in U$ und $\forall \alpha \in \mathbb{E}$ gilt:

U1 $x + y \in U$

U2 $\alpha x \in U$.

Bemerkung.
Jeder Untervektorraum U enthählt den Nullvektor, d.h.

U0 $\mathbf{0} \in U$.

Satz.
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum.

Beispiel 4:

Zu zeigen: $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

Bemerkung
Wir haben zwei Optionen:

1. Überprüfe ob V1 und V2 von der Vektorraum Definition erfüllt sind
2. Verwende den Satz von oben und zeige nur U1 und U2

Beweis:
Wir führen den Beweis mit der zweiten Option durch. Also genügt es nach dem Satz zu zeigen, dass W ein Untervektorraum ist.

Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W, \lambda \in \mathbb{E}$

U0 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, da $0 + 0 + 0 = 0$, (U0 folgt trivialerweise)

U1 $x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}\in W$,

da $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0}+\underbrace{(y_1+y_2+y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0}=0$

U2 $\lambda x=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix}\in W$, da $\lambda x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=\lambda\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0}=0$

Oder statt, dass ihr U1 und U2 separat zeigt könnt ihr auch die "all in one" Variante zeigen:

U1/U2 $x-\lambda y=\begin{pmatrix}x_1-\lambda y_1\\x_2-\lambda y_2\\x_3-\lambda y_3\end{pmatrix}\in W$,

da $(x_1-\lambda y_1)+(x_2-\lambda y_2)+(x_3-\lambda y_3)=\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0}-\lambda\underbrace{(y_1+y_2+y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0}=0$ $\square$

3 Injektiviät , Surjektivität, Bijektivität

Definition.
Eine Abbildung $f: X\to Y$ heisst *injektiv*, falls

$$\forall x_1,x_2\in X:\quad x_1\neq x_2\quad\Rightarrow\quad f(x_1)\neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition.
Eine Abbildung $f: X\to Y$ heisst *surjektiv*, falls

$$\forall y\in Y\,\exists x\in X:\quad f(x)=y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition.
Eine Abbildung $f: X\to Y$ heisst *bijektiv*, falls

$$\forall y\in Y\,\exists! x\in X:\quad f(x)=y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f *genau eins* "getroffen".)