Lineare Algebra

10. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

November 28, 2019

1 Erinnerung

Definition. Eine Abbildung $B : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}$, $(v, w) \mapsto B(v, w)$ heisst ***Bilinearfrom*** (BLF) auf $\mathbb{E}^n$, falls die Linearität in beiden Argumenten erfüllt ist: $\forall u, v, w \in \mathbb{E}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

- $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w), \quad B(\lambda u, v) = \lambda B(u, v)$
- $B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w), \quad B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v).$

Definition.
B eine BLF die auf $\mathbb{R}$ abbildet, heisst *symmetrisch*, falls $B(v, w) = B(w, v)$ und *alternierend*, falls $B(v, w) = -B(w, v)$, für $\forall v, w \in \mathbb{E}^n$.

Definition. Eine Abbildung $B : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}$, $(v, w) \mapsto B(v, w)$ heisst *sesquilinear* auf $\mathbb{E}^n$, falls die Linearität im zweiten Argumente erfüllt ist und im ersten Argument semilinear ist: $\forall u, v, w \in \mathbb{E}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

- $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w), \quad B(\lambda u, v) = \overline{\boldsymbol{\lambda}} B(u, v)$
- $B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w), \quad B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v).$

Definition.
B eine BLF die auf $\mathbb{C}$ abbildet, heisst *hermitesch*, falls $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Definition.
Sei B eine BLF die auf $\mathbb{C}$ abbildet, heisst *positiv definit*, wenn

$$B(v, v) > 0 \quad \text{für jedes } v \in \mathbb{E}^n \text{ mit } \; v \neq 0.$$

Bemerkung.
Eine symmetrische, positiv definite BLF heisst euklidisches Skalarprodukt.

Definition.
Ein ***Skalarprodukt*** ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k$ so dass: $\forall u, v, w \in \mathbb{E}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

(i) $\langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \overline{\lambda} \langle w, u \rangle$ (Bilinearität bzw. Sesquilinearität)

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (symmetrie bzw. hermitesch)

(iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positiv semidefinit)

Definition.
Die Länge oder *euklidische Norm* eines Vektors $x \in \mathbb{E}^n$ ist die nichtnegative reelle Zahl $\|x\|$ definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^H x} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

Bemerkung.
Sei $x, y \in \mathbb{E}^n, \alpha \in \mathbb{E}$, dann gilt:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(\alpha).$$

2 Parsevalsche Formel

Definition.
Sei $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt auf V.

- $\mathcal{B}$ heisst *orthogonal* $\Leftrightarrow$ $\langle b_k, b_l \rangle = 0, \forall k \neq l$
  In Worten: Basisvektoren "stehen $\perp$ aufeinander".
- $\mathcal{B}$ heisst *orthonormal* (ONB) $\Leftrightarrow$ $\langle b_k, b_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$
  In Worten: Basisvektoren "stehen $\perp$ aufeinander" *und* haben Länge 1.

Bemerkung.
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in I}$ Basis von V. Per Definition von Basis kann man jedes $v \in V$ schreiben als $v = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$. Falls $\mathcal{B}$ eine ONB ist, so ist $\alpha_i = \langle b_i, v \rangle$, $\forall i \in I$,
$\Rightarrow$ Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ sind $\langle b_i, v \rangle$.

Satz.
Sei $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ eine ONB von V. Dann gilt:

- Die Koordinaten von $v \in V$ sind gegeben durch $\xi_k = \langle b_k, v \rangle_V$, $k \in \{1, ..., n\}$, d.h. $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle b_k, v \rangle_V b_k$.
- Falls $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v, w \in V$ sind, $\xi_k = \langle b_k, v \rangle_V, \eta_k = \langle b_k, w \rangle_V$, so gilt die *Parsevalsche Formel*:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_V &= \xi^H \eta \\ &= \langle \xi, \eta \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung.
Die Parsevalsche Formel besagt, dass der Winkel zwischen zwei Vektoren von einem euklidischen/unitären Vektorraum V durch eine Koordinatentransformation nicht verändert wird, falls wir eine orthonormale Basis haben. Somit können wir eine Koordinatentransformation von V zu $\mathbb{E}$ finden und den Winkel mit dem uns bekannten euklidischen Skalarprodukt (d.h. Standardskalarprodukt) berechnen.

Bemerkung.
Aus der Parsevalscher Formel folgt:

- $$\begin{aligned}\|v\|_V &:= \sqrt{\langle v, v\rangle_V} \\ &\overset{\text{Parseval}}{=} \|\xi\| \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sphericalangle_V(v, w) &:= \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle_V}{\|v\|_V \|w\|_V}\right) \\ &= \sphericalangle(\xi, \eta) \\ &= \arccos\left(\frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\|\xi\| \|\eta\|}\right)\end{aligned}$$

- $v \perp w$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle_V \Leftrightarrow \xi \perp \eta$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle$

3 Orthogonale und unitäre Matrizen (II)

Definition.
Die Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist orthogonal/unitär genau dann, wenn die Zeilen von A paarweise orthonormal (bezüglich dem Standardskalarprodukt) zueinander stehen und die Spalten von A paarweise orthonormal (bezüglich dem Standardskalarprodukt) zueinander stehen.

Definition.
Eine komplexe $n \times n$ - Matrix A heisst *unitär*, falls $A^H A = AA^H = \mathbb{1}$.
Eine reelle $n \times n$ - Matrix A heisst *orthogonal*, falls $A^T A = AA^T = \mathbb{1}$.

Bemerkung.
Der Begriff der orthogonalen/unitären Matrizen $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist unabhängig vom Skalarprodukt (per Definition vom euklidischen Skalarprodukt, d.h. $AA^H = A^H A = \mathbb{1}$). Der Begriff der orthogonalen Vektoren ist hingegen abhängig vom betrachteten Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$.

Bemerkung.
Warnung: Diese Bemerkung ist ein Gedankenspiel und dient zur Vertiefung des bereits erworbenen Verständnis.
Würde man die Defintion von der orthogonalen/unitären Matrix auf ein allgemeines Skalaprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_M$ erweitern würde man folgendes erhalten:

$$AMA^H = A^H MA = \mathbb{1}$$

Das M-Skalarprodukt wird wie folgt berechnet, falls bereits gegeben ist:

$$M = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle_M & \langle e_1, e_2\rangle_M & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle_M \\ \langle e_2, e_1\rangle_M & \langle e_2, e_2\rangle_M & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle e_{n-1}, e_n\rangle_M \\ \langle e_n, e_1\rangle_M & \cdots & \langle e_n, e_{n-1}\rangle_M & \langle e_n, e_n\rangle_M \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
Für das Standard-Skalarprodukt würde man dann folgendes erhalten:

$$A\mathbb{1}A^H = A^H\mathbb{1}A = \mathbb{1} \Leftrightarrow AA^H = A^HA = \mathbb{1}$$

Beispiel 1:
Betrachte das M-Skalarprodukt für $M \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist symmetrisch positiv definit:

$$\langle v, w\rangle_M := v^TMw$$

Dann steht v senkrecht auf w bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_M \Leftrightarrow v^TMw = 0$.

Beispiel 2:
Gegeben: ONB (bezüglich dem Standardskalarprodukt) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right\}.$$

Gesucht: T_B^A und T_A^B

Lösung:

$$T_A^B = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix} \text{ ist orthogonal mit } (T_A^B)^{-1} = (T_A^B)^T$$

$$T_B^A = (T_A^B)^{-1} = (T_A^B)^T = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Bei orthogonalen/uniären Matrizen ist es einfach die Inverse zu bestimmen, d.h. hat man T_A^B erhält man sofort T_B^A.

4 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Definition.
Es seien X und Y zwei unitäre (bzw. orthogonale) Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F : X \to Y$ heiss *unitär* (bzw. *orthogonal*), falls für $x, y \in X$ gilt:

$$\langle F(x), F(y)\rangle_Y = \langle x, y\rangle_X.$$

Satz 6.13
Für eine orthogonale oder unitr̈e Abbildung $F : X \to F$ gilt:

(i) $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$, d.h. F ist *längentreu* (oder *isometrisch*);

(ii) $x \perp y \quad \Rightarrow \quad F(x) \perp F(y)$, d.h. F ist *winkeltreu*;

(iii) $\ker(F) = \{0\}$, d.h. F ist *injektiv*;

Ist $\dim(X) = \dim(Y) < \infty$, so gilt zusätzlich:

(I) F ist ein *Isomorphismus*;

(II) Ist $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von X, so ist $\{F(b_1), ..., F(b_n)\}$ eine ONB von Y;

(III) F^{-1} ist *unitär* (bzw. *orthogonal*;

(IV) Die Abbildungsmatrix A bezüglich orthonormierten Basen in X und Y ist *unitär* (bzw. *orthogonal*).