Lineare Algebra

6. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

November 6, 2019

1 Vektorräume

Definition.
Eine Menge $\mathbb{E}$ zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +: \quad & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad (x, y) \mapsto x + y && \text{(Addition)} \\ \cdot: \quad & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y && \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

heisst *Körper*, wenn $\forall x, y, z \in \mathbb{E}$ folgendes gilt:

K1 $\mathbb{E}$ zusammen mit der Addition $+$ ist eine abelsche Gruppe.
(Ihr neutrales Element wird mit 0, das zu $a \in \mathbb{E}$ inverse Element mit $-a$ bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8: $\langle \mathbb{E}; + \rangle$ is an abelian group):

- **(i)** (Assoziativität) $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- **(ii)** (Neutrales Element) $\quad \exists e \in \mathbb{E} : \quad x + e = e + x = x$
- **(iii)** (Inverses Element) $\quad \exists x' \in \mathbb{E} : \quad x + x' = x' + x = e$
- **(iv)** (Abelsch $\Leftrightarrow$ Kommutativität) $\quad x + y = y + x$

K2 Bezeichnet $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{0\}$, so gilt für $x, y \in \mathbb{E}^*$ auch $x \cdot y \in \mathbb{E}^*$, und $\mathbb{E}^*$ zusammen mit der so erhaltenen Multiplikation ist eine abelsche Gruppe.
(Ihr neutrales Element wird mit 1, das zu $x \in \mathbb{E}^*$ inverse Element mit x^{-1} oder $1/x$ bezeichnet. Man schreibt $y/x = x^{-1}y = yx^{-1}$.
Vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8: $\langle \mathbb{E}; \cdot \rangle$ is an abelian group)

(vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: Definition 5.26 und Theorem 5.23)

Bemerkung.
Meistens werden wir mit den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten. Ein weiterer Körper der für uns Informatiker bekannt ist, ist der kleinste endliche Körper $\mathbb{Z}_2$, der nur $\{0, 1\}$ enthält.

Definition.
Ein *Vektorraum* V über $\mathbb{E}$ (oder auch $\mathbb{E}$-Vektorraum; VR) ist eine ist einen nichtleere Menge V zusammen mit zwei Operationen:

$$\begin{aligned} +: \quad & V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x + y && \text{(Addition)} \\ \cdot: \quad & \mathbb{E} \times V \to V, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha y && \text{(Skalarmultiplikation)} \end{aligned}$$

so dass $\forall x, y, z \in V$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}$ gilt:

V1 V zusammen mit der Addition ist eine abelsche (kommutative) Gruppe (das neutrale Element heißt Nullvektor, es wird mit $\mathbf{0}$, und das Negative wird mit $-x$ bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: $\langle V; + \rangle$ is an abelian group):

- **(i)** (Assoziativität) $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- **(ii)** (Neutrales Element) $\quad \exists e \in V : \quad x + e = e + x = x$
- **(iii)** (Inverses Element) $\quad \exists x' \in V : \quad x + x' = x' + x = e$
- **(iv)** (Abelsch $\Leftrightarrow$ Kommutativität) $\quad x + y = y + x$

V2 Die Multiplikation mit Skalaren muss in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:

(i) (Distributivität I) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ii) (Distributivität II) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(iii) (Assoziativität) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(iv) (Verträglichkeit mit 1) $1x = x$

Beispiel 1:

1. n-dimensionale Vektoren bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.
2. $m \times n$-Matrizen bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.
3. $\mathcal{P}_n :=$ {Polynome in einer Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{E}$ von max. Grad n} bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.

Definition.
Sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$, $U \neq \{\}$. U hiesst *Untervektorraum*, Unterraum, linearer Teilraum (UVR), falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. wenn $\forall x, y \in U$ und $\forall \alpha \in \mathbb{E}$ gilt:

U1 $x + y \in U$

U2 $\alpha x \in U$.

Bemerkung.
Jeder Untervektorraum U enthählt den Nullvektor, d.h.

U0 $\mathbf{0} \in U$.

Satz.
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum.

Beispiel 2:

Zu zeigen: $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

Bemerkung
Wir haben zwei Optionen:

1. Überprüfe ob V1 und V2 von der Vektorraum Definition erfüllt sind
2. Verwende den Satz von oben und zeige nur U1 und U2

Beweis:
Wir führen den Beweis mit der zweiten Option durch. Also genügt es nach dem Satz zu zeigen, dass W ein Untervektorraum ist.

Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W, \lambda \in \mathbb{E}$

U0 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, da $0 + 0 + 0 = 0$, (U0 folgt trivialerweise)

U1 $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in W,$

da $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0} = 0$

U2 $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in W$, da $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} = 0$

Oder statt, dass ihr U1 und U2 separat zeigt könnt ihr auch die "all in one" Variante zeigen:

U1/U2 $x - \lambda y = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda y_1 \\ x_2 - \lambda y_2 \\ x_3 - \lambda y_3 \end{pmatrix} \in W,$

da $(x_1 - \lambda y_1) + (x_2 - \lambda y_2) + (x_3 - \lambda y_3) = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} - \lambda \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0} = 0$ $\square$

2 Basen, Dimensionen und lineare (Un-)Abhänigkeit

Bemerkung.
Für diesen Abschnitt werden wir folgendes annehmen. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und eine *Familie* (Menge) $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$. Ist $I = \{1, ..., r\}$, so hat man Vektoren $v_1, ..., v_r$.

Definition.
Seien $v_1, ..., v_r \in V$ ausgewählte Vektoren. Ein Vektor der Form

$$x := \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k$$

mit $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{E}$ heisst *Linearkombination* von $v_1, ..., v_r$.

Definition.
Für allgemeines I definiert man

$$\text{span}_{\mathbb{E}}(v_i)_{i \in I}$$

als die Menge all der $v \in V$ die sich aus einer (von v abhängigen) endlichen Teilfamilie (Teilmenge) von $(v_i)_{i \in I}$ linear kombinieren lassen.
Man nennt $\text{span}_{\mathbb{E}}(v_i)_{i \in I}$ den von der Familie (Menge) *aufgespannten* (oder *erzeugten*) Raum. Für eine endliche Familie $(v_1, ..., v_r)$ verwendet man oft die suggestivere Notation:

$$\begin{aligned} \text{span}_{\mathbb{E}}(v_1, ..., v_r) :&= \mathbb{E} v_1 + ... + \mathbb{E} v_n \\ &= \{v \in V \quad | \quad \exists \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{E} \text{ mit } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r\}. \end{aligned}$$

Bemerkung.
Die folgenden Notationen sind äquivalent: $\text{span}_{\mathbb{E}}(v_1, ..., v_r) \Leftrightarrow \text{span}_{\mathbb{E}}\{v_1, ..., v_r\} \Leftrightarrow \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Definition.
Eine Familie $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ in einem Vektorraum V heisst *Erzeugendensystem* von V, wenn

$$V = \operatorname{span}(v_i)_{i\in I},$$

d.h. wenn jedes $v \in V$ Linearkombination von endlich vielen v_i ist.

Bemerkung.
Falls klar ist, welcher Körper gemeint ist, schreibt man nur span statt $\operatorname{span}_{\mathbb{E}}$.

Bemerkung.
Sei V ein $\mathbb{E}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie (Menge) von Elementen aus V mit $I = \{1, ..., r\}$. Dann gilt:

(i) $\operatorname{span}(v_1, ..., v_r)$ ist ein Untervektorraum

(ii) Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum und gilt $v_i \in W$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$ so ist $\operatorname{span}(v_1, ..., v_r) \subset W$.

Beispiel 3:

- $\operatorname{span}(1, x, x^2, x^3) = \mathcal{P}_3$
- $\operatorname{span}(x^3 + x^2, x^2 - 1, x, x - 1, 1000) = \mathcal{P}_3$

$\Rightarrow$ ein Erzeugendensystem ist nicht eindeutig.

Definition.
$v_1, ..., v_r \in V$ heissen *linear unabhängig*, wenn:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

und sonst heissen sie *linear abhängig*.

Bemerkung.
$v_1, ..., v_r \in V$ heissen linear unabhängig genau dann, wenn kein v_i sich als Linearkombination der anderen a_j mit $j \neq i$ schreiben lässt. (z.B. v_1 ist keine Linearkombination von $v_2, ..., v_r$ schreiben).

Beispiel 4:

- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist linear abhängig von $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, weil $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist linear unabhängig von $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.
  Bei komponentenweiser Multiplikation bekommt man in der ersten Koordinate niemals 0, wenn man 2 und 3 behalten will.

Definition.

Sei $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I} \subseteq V$. $\mathcal{B}$ heisst *Basis* von V, wenn

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{span}(\mathcal{B}) \quad (V \text{ wird erzeugt von } \mathcal{B}) \\ \mathcal{B} &= (b_i)_{i \in I} \quad (\text{alle } b_i \text{ sind untereinander linear unabhängig}). \end{aligned}$$

Satz.
$\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h.

$$\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V, \text{ aber } \operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{b_i\}) \neq V, \quad \forall b_i \in \mathcal{B}.$$

Satz.
$\mathcal{B}$ ist ein maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. $(b_i)_{i \in I}$ sind linear unabhängig aber $(b_i)_{i \in I} \cup \{v\}$ sind nicht mehr linear unabhängig, $\forall v \in V \setminus \mathcal{B}$.

Bemerkung.
Sind $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von V, so gilt $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Definition.
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann ist $|\mathcal{B}| = \dim(V)$ ($= \#$ Basisvektoren) die Dimension von V, wobei $|\cdot| \mathrel{\widehat{=}}$ Kardinalität von einer Menge ist.

Bemerkung.
Falls $\dim(V) = n$, dann gilt allgemein:

- Falls $k < n$, sind $v_1, ..., v_k \in V$ *nicht erzeugend*
- Falls $k > n$, sind $v_1, ..., v_k \in V$ *erzeugend und linear abhängig*

Basisauswahlsatz.
Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraumes kann man eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine endliche Basis.

Basisergänzungssatz.
In einem endlich erzeugten Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $w_1, ..., w_n$ gegeben. Dann kann man $w_n + 1, ..., w_r$ finden so dass

$$\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n, w_n + 1, ..., w_r\}$$

eine Basis von V ist.

Beispiel 5:

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n = \dim(\mathbb{C}^n)$
- $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1 \quad (\mathcal{B}(\mathcal{P}_n) = \{\underbrace{1, x, x^2, ..., x^n}_{n+1 \text{ Basisvektoren}}\})$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \quad$ (Basis von $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ ist z.B. $\{1, i\}$)
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1 \quad$ (Basis von $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ ist z.B. $\{1\}$)

Definition.
In einem endlich-dimensionalen Vektorraums V mit Skalarprodukt heisst der zu einem echten Unterraum U orthogonale komlementäre Unterraum das *othogonale Komplement* von U und wird mit $U^\perp$ bezeichnet. Es wird implizit charakterisiert durch die Beziehung

$$V = U \oplus U^\perp, \qquad U \perp U^\perp$$

oder explizit durch

$$U^\perp := \{x \in V | x \perp U\}.$$

Wir nennen dann V eine *direkte Summe orthogonaler Komplemente*.

Eigenschaften.

(i) $(U^\perp)^\perp = U$

(ii) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Tricks beim Rechnen (bei Fragen betreffend Dimension, Basis, lineare Abhängigkeit, etc.)
Gegeben: $v_1, ..., v_k \in V$
Gesucht: $\dim(V)$, $\text{span}(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig?

1. Schreibe $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_k^T \end{pmatrix} = A$ in eine Matrix mit n Zeilen.
2. Führe Gauss-Elimination auf A aus bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt.
3. Ziehe Fazit:
   - $\text{Rang}(A) = \dim(\text{span}(v_1, ..., v_k))$
   - $\text{Rang}(A) = k \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ ist linear unabhängig
   - $\text{Rang}(A) < k \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ ist linear abhängig
   - $\text{Rang}(A) = \dim(V) \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ ist erzeugend
   - Falls $\text{Rang}(A) = \dim(V) = k$, dann bilden $v_1, ..., v_k$ also eine Basis für $\mathbb{R}^n$

Beispiel 6:
Zu zeigen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

Beweis:
Wissen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, und wir haben 3 Vektoren.
Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow \quad \text{Rang}(A) = 3 \quad$ voller Rang
$\Rightarrow \quad$ Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$. $\square$

Beispiel 7:
Ist $\mathcal{B} = \{1, x, 1 + x^2 + x^3\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$?
Wenn ja beweise, wenn nein, erweitere zu einer Basis.

Wir wissen: $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$
$\mathcal{B}$ kann keine sein, weil $\dim(\mathcal{B}) = 3 < 4$.

Behauptung: $\mathcal{B}' = \{1, x, 1 + x^2 + x^3, x^2\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_3$.

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 \\ x &\mathrel{\widehat{=}} e_2 \\ x^2 &\mathrel{\widehat{=}} e_3 \\ x^3 &\mathrel{\widehat{=}} e_4 \\ 1 + x^2 + x^3 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 + e_3 + e_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ linear unabhänging, also ist $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ $\square$

3 Basiswechsel, Koordinatentransformation (I)

Definition.
Seien $\mathcal{A} = (e_1, ..., e_n)$ die kanonische Basis vom Vektorraum V und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine weitere Basis von V beschrieben mit der kanonischen Basis. Dann existiert eine *Transformationsmatrix* mit:

$$T_A^B = (b_1| \ \cdots |b_n) \quad \text{mit } e_i = T_A^B b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{T_B^A} V_{\mathcal{B}}$$

Bemerkung.
Es gilt die folgende Rechenregel: $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
Mit der obigen Definition erhalten wir somit: $T_B^A e_i = b_i,\ i \in \{1, ..., n\}$.