Lineare Algebra

7. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

November 6, 2019

1 Lineare Abbildungen

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *injektiv*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *surjektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *bijektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists! x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f *genau eins* "getroffen".)

Definition.
Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen $\mathbb{E}$-Vektorräumen V und W heisst *linear* (genauer *Homomorphismus* von $\mathbb{E}$-Vektorräumen), wenn $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

L1 $F(v + w) = F(v) + F(w)$

L2 $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Diese beiden Bedingungen kann man zusammenfassen zu einer:

L $F(v + \lambda w) = F(v) + \lambda F(w)$.

Notation.
Für $F : V \to W$ linear ist $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Bemerkung.
Es ist üblich, den Begriff Homomorphismus zu verschärfen:

(i) $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und bijektiv $\Leftrightarrow$ *Isomorphismus* (Notation: $V \cong W$)

(ii) $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $V = W$ $\Leftrightarrow$ *Endomorphismus* (Notation: $F \in End(V)$)

(iii) $F \in \mathrm{End}(V)$ und bijektiv $\Leftrightarrow$ *Automorphismus*

Zudem gilt: (i) $\Leftrightarrow \exists G : W \to V$ linear, so dass $F \circ G = \mathrm{id}_W$, $G \circ F = \mathrm{id}_V$, d.h.

$$\forall w \in W : \quad F(G(w)) = w$$
$$\forall v \in V : \quad G(F(v)) = v$$

Bemerkung.
Seien $M(F)$, $M(G)$ die darstellenden Matrizen von $F : V \to W$ isomorph und $G : W \to V$ homomorph und V, W sind endlichdimensionale Vektorräume, d.h. $\dim(V) < \infty$ und $\dim(W) < \infty$. Dann bedeutet Bijektivität von F, dass

- $\dim(V) = \dim(W)$
- $M(F) \cdot M(G) = M(G) \cdot M(F) = \mathbb{1}_{\dim(V)} \Leftrightarrow M(F) = (M(G))^{-1}$

Definition.
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ von V gibt es genau einen Isomorphismus:

$$\phi_B : \mathbb{E}^n \to V, (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \text{ mit } \phi_B(e_i) = v_i.$$

(In Worten: ϕ_B ordnet x seinen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ zu.)

Definition.
Sei die $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- $\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{F(v) | v \in V\} \subset W$ ist ein Untervektorraum von W und heisst $\mathrm{Bild}(F)$ oder $\mathbf{Im}(\boldsymbol{F})$.
- $\ker(F) := \{v \in V | F(v) = 0\} \subset V$ ist ein Untervektorraum von V und heisst $\mathbf{ker}(\boldsymbol{F})$.

Satz.
Sei $F : V \to W$ linear und V, W sind Vektorräume. Dann gilt:

(i) $F(0) = 0$, die Null wird immer auf die Null abgebildet

(ii) F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(W)$

(iii) F injektiv $\Leftrightarrow \ker(F) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

(iv) F ist ein Isomorphismus $\quad \Leftrightarrow \quad \dim(V) = \dim(W) = \mathrm{rang}(F)$

Satz.
Sind f, g linear Abbildungen $\quad \Rightarrow f \circ g$ ist eine lineare Abbildung.

Satz.
Sind f, g lineare Abbildungen, dann ist die Funktion $F := f \pm g$ die aus der Linearkombination von f, g entsteht wieder eine lineare Abbildung.

Definition.
Der Rang der linearen Abbildung F ist definiert als:

$$\mathrm{rang}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F)).$$

Bemerkung.
Der Rang der linearen Abbildung F ist gleich dem Rang ihrer Abbildungsmatrix $M(F)$.
Es gilt: $\quad \mathrm{rang}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rang}(M(F)) = \mathrm{rang}(M(F)^T)$

Bemerkung.
Zeilenrang = Spaltenrang: $\quad \mathrm{rang}(M(F)) = \mathrm{rang}(M(F)^T)$
Achtung: Im Allgemeinen gilt: $\quad$ Spaltenraum $\neq$ Zeilenraum

Satz.
Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume eines grösseren Vektorraums (endlichdimensional $\Leftrightarrow \dim(V) = n < \infty$ und $\dim(W) = k < \infty$) und sei $f : V \to W$ linear, dann gelten die folgenden ***Dimensionsformeln***:

- $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$
- $n = \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Eigenschaften von linearen Abbildungen:
Seien V, W $\mathbb{E}$-Vektorräume und $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Sei $F : V \to W$ linear.

- $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}(F(v_1), ..., F(v_n))$, d.h. F ist eindeutig definiert durch die Werte der Basisvektoren
- Ist F injektiv und $v_1, ..., v_n \in V$ linear unabhängig, dann sind $F(v_1), ..., F(v_n) \in \mathrm{Im}(F)$ linear unabhängig
- $\dim(F) < \infty$ und F injektiv $\quad \Rightarrow \quad$ F ist bijektiv!

Beispiel 1:
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x - 1$.

F ist nicht linear, da $F(0) = -1 \neq 0$.

Bemerkung.
Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und die Vektorräume V,W sind endlichdimensional. Das Bild von f wir aufgespannt von den Spalten von $M(f)$, d.h.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{\text{Spalten von } M(f)\}$.

Bemerkung.
Sei $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und die dazugehörige Abbildungsmatrix $M(F)$. Dann gilt:

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(F)x = 0.$$

Beispiel 2:
Gegeben:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{s.d.} \quad M(F)x = F(x)$$

Gesucht: $\ker(F)$, Basis vom $\ker(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, Basis von $\mathrm{Im}(F)$

Um $\ker(F)$ zu berechnen, berechne die Zeilenstufenform von $M(F)$:

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{31}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(i)-\frac{1}{-2}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{M}(F)$$

Um Basis zu finden benutzen wir die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} && \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow && \dim(\ker(F)) &= \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow && \dim(\ker(F)) &= 3 - 2 \\ && &= 1 \end{aligned}$$

$\dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rang}(F) = \mathrm{rang}(M(F)) = 2$ können wir direkt von $\widetilde{M}(F)$ ablesen. Dank der Dimensionsformel wissen, wir das die Basis vom Kern F einen Basisvektor enthält. Folgend werden die Lösungsmenge von $M(F)$ (bzw. $\widetilde{M}(F)$) berechnen, welche zugleich der $\ker(F)$ =$\ker(M(F))$ =$\ker(\widetilde{M}(F))$ ist, da wir das LGS $M(F)x = 0$ lösen.
(Wie ihr in der Übungsstunde gesehen habt, können wir die Vektoren, die im Kern liegen, auch mit Hilfe von $\widetilde{M}(F)$ "erraten".)

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(F) &\overset{\text{3. Zeile}}{\Rightarrow} \quad t := x_3, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{freier Parameter} \\ \widetilde{M}(F) &\overset{\text{2. Zeile}}{\Rightarrow} \quad -2x_2 + 5x_3 = 0 \\ &\overset{t=x_3}{\Leftrightarrow} \quad -2x_2 + 5t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x_2 = 5t \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2}t \\ \widetilde{M}(F) &\overset{\text{1. Zeile}}{\Rightarrow} \quad 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ &\overset{t=x_3}{\Leftrightarrow} \quad 2x_1 + 3t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x_2 = -3t \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{2}t \\ \Longrightarrow \quad & \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ker(F) = \ker(M(F)) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \ x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Basis vom } \ker(F) \text{ ist zum Beispiel : } \mathcal{B}_{\ker(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Für das Bild $\mathrm{Im}(F)$ wissen wir wegen der Bemerkung von oben:

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Wähle aus den Spalten von $M(F)$ (Erzeugendensystem von $\text{Im}(F)$) zwei Vektoren als Basis von $\text{Im}(F)$, nämlich diejenigen die Pivotelemente in $\widetilde{M}(F)$ haben:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\text{Im}(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel 3:
Gegeben: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die folgende Matrix:

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Bestimme die Basen von $\ker(F)$ und $\text{Im}(F)$.

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \overset{(i)-\frac{2}{-3}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} =: \widetilde{M}(F)$$

Um die $\dim(\ker(F))$ zu finden benutzen wir die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} & \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(F)) + \dim(\text{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\ker(F)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\ker(F)) = 3 - 2 \\ & = 1 \end{aligned}$$

$\dim(\text{Im}(F)) = \text{rang}(F) = \text{rang}(M(F)) = 2$ können wir direkt von $\widetilde{M}(F)$ ablesen. Dank der Dimensionsformel wissen, wir das die Basis vom Kern F einen Basisvektor enthält.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ker(F) = \ker(M(F)) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \ x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Basis vom } \ker(F) \text{ ist zum Beispiel} : \mathcal{B}_{\ker(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Für das Bild $\text{Im}(F)$ wissen wir wegen der Bemerkung von oben:

$$\text{Im}(F) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Wähle aus den Spalten von $M(F)$ (Erzeugendensystem von $\text{Im}(F)$) zwei Vektoren als Basis von $\text{Im}(F)$, nämlich diejenigen die Pivotelemente in $\widetilde{M}(F)$ haben:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\text{Im}(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Abbildungsmatrix (darstellende Matrix; Spezialfall mit Standardbasis)
Gegeben: V, W ein Vektorraum, $F : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B}), v \mapsto F(v)$ und Basis von V mit $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ und die Standardbasis von W mit $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$
Gesucht: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$

1. Berechne für jeden Basisvektor $F(a_i),\ i \in \{1, ..., n\}$
2. Erstelle $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \underbrace{(F(a_1), ..., F(a_n))}_{n\text{-Spalten}} \}\quad m$-Zeilen.

   Wir haben die Abbildungsmatrix von F erhalten, wobei der Definitionsbereich bezüglich $\mathcal{A}$ und Bildbereich bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben ist.

Beispiel 4:
Sei $F = \frac{d}{dt} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, p \mapsto \dot{p} = \frac{dp}{dt}$.

(i) Zu zeigen: F ist eine lineare Abbildung.

Beweis: $\forall a, b \in \mathcal{P}_2,\ \lambda \in \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} F(a + \lambda b) &= \frac{d}{dt}(a + \lambda b) \\ &= \frac{d}{dt}a + \lambda \frac{d}{dt}b \\ &= F(a) + \lambda F(b) \qquad \square \end{aligned}$$

(ii) Finde die Abbildungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ bezüglich der Monombasis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \in \mathcal{P}_2, \qquad p \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\dot{p} = \lambda_1 + 2\lambda_2 t \in \mathcal{P}_1, \qquad \dot{p} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\begin{aligned} 1 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 \\ t &\mathrel{\widehat{=}} e_2 \\ t^2 &\mathrel{\widehat{=}} e_3 \end{aligned}$$

$$\dot{p}(1) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t^2) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
Ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ ist durch die Funktionswerte $p(x_i)$ an $n+1$ paarweise verschiedenen Punkten $x_i \in \{1, ..., n\}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung.
Seien V, U, W $\mathbb{E}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$, $\dim(U) = k$ und $\dim(W) = \ell$, dann ist die Dimensionsregel für Verknüpfungen von linearen Abbildungen:

$$M(f) \in \mathbb{R}^{\ell \times n},\, M(g) \in \mathbb{R}^{k \times \ell} \quad \Rightarrow \quad M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) \in (\text{"}\mathbb{R}^{k \times \ell} \cdot \mathbb{R}^{\ell \times n}\text{"}) = \mathbb{R}^{k \times n}$$

2 Basiswechsel, Koordinatentransformation (I)

Definition.
Seien $\mathcal{A} = (e_1, ..., e_n)$ die kanonische Basis vom Vektorraum V und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine weitere Basis von V beschrieben mit der kanonischen Basis. Dann existiert eine *Transformationsmatrix* mit:

$$T_A^B = (b_1| \ \cdots |b_n) \quad \text{mit } e_i = T_A^B b_i,\, i \in \{1, ..., n\}.$$

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{T_B^A} V_{\mathcal{B}}$$

Bemerkung.
Es gilt die folgende Rechenregel: $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
Mit der obigen Definition erhalten wir somit: $T_B^A e_i = b_i,\, i \in \{1, ..., n\}$.