Lineare Algebra

8. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

November 13, 2019

1 Erinnerung (Orthogonale und unitäre Martrizen)

Definition.
Eine komplexe $n \times n$ - Matrix A heisst ***unitär***, falls $A^H A = AA^H = \mathbb{1}$.
Eine reelle $n \times n$ - Matrix A heisst ***orthogonal***, falls $A^T A = AA^T = \mathbb{1}$.

Satz.
Sind $A, B \in \mathbb{E}^{n \times n}$ unitäre (bzw. orthogonale) Matrizen, so gilt:

(i) A ist regulär

(ii) $A^{-1} = A^H$ (bzw. $A^{-1} = A^T$)

(iii) A^{-1} ist unitär (orthogonal)

(iv) AB ist unitär (orthogonal)

Definition.
Das *Kronecker-Delta* ist definiert durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Definition. *Einheitsvektoren*

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1:

- $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$
- $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

Definition *Orthonormal*
Seien $a, b \in \mathbb{E}^n$. Die Vektoren a, b sind orthonormal, falls folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Vektoren sind normiert, also es gilt:

$$\|a\| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \|b\| = 1.$$

(ii) Die Vektoren sind orthogonal, also es gilt:

$$\langle a, b \rangle = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

Bemerkung.
Für eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit der Form $A = (a_1 | ... | a_n)$ sind die Spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$ paarweise orthonormal.

2 Lineare Abbildungen

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *injektiv*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *surjektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *bijektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists! x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f *genau eins* "getroffen".)

Definition.
Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen $\mathbb{E}$-Vektorräumen V und W heisst *linear* (genauer *Homomorphismus* von $\mathbb{E}$-Vektorräumen), wenn $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

L1 $F(v + w) = F(v) + F(w)$

L2 $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Diese beiden Bedingungen kann man zusammenfassen zu einer:

L $F(v + \lambda w) = F(v) + \lambda F(w)$.

Notation.
Für $F : V \to W$ linear ist $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Bemerkung.
Es ist üblich, den Begriff Homomorphismus zu verschärfen:

(i) $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und bijektiv $\Leftrightarrow$ *Isomorphismus* (Notation: $V \cong W$)

(ii) $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $V = W$ $\Leftrightarrow$ *Endomorphismus* (Notation: $F \in End(V)$)

(iii) $F \in \mathrm{End}(V)$ und bijektiv $\Leftrightarrow$ *Automorphismus*

Zudem gilt: (i) $\Leftrightarrow \exists G : W \to V$ linear, so dass $F \circ G = \mathrm{id}_W$, $G \circ F = \mathrm{id}_V$, d.h.

$$\begin{aligned} \forall w \in W : \quad & F(G(w)) = w \\ \forall v \in V : \quad & G(F(v)) = v \end{aligned}$$

Bemerkung.
Seien $M(F)$, $M(G)$ die darstellenden Matrizen von $F : V \to W$ isomorph und $G : W \to V$ homomorph und V, W sind endlichdimensionale Vektorräume, d.h. $\dim(V) < \infty$ und $\dim(W) < \infty$. Dann bedeutet Bijektivität von F, dass

- $\dim(V) = \dim(W)$
- $M(F) \cdot M(G) = M(G) \cdot M(F) = \mathbb{1}_{\dim(V)} \Leftrightarrow M(F) = (M(G))^{-1}$

Definition.
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ von V gibt es genau einen Isomorphismus:

$$\phi_B : \mathbb{E}^n \to V, (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \text{ mit } \phi_B(e_i) = v_i.$$

(In Worten: ϕ_B ordnet x seinen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ zu.)

Definition.
Sei die $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- $\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{F(v) | v \in V\} \subset W$ ist ein Untervektorraum von W und heisst $\mathrm{Bild}(F)$ oder $\mathbf{Im}(\boldsymbol{F})$.
- $\ker(F) := \{v \in V | F(v) = 0\} \subset V$ ist ein Untervektorraum von V und heisst $\mathbf{ker}(\boldsymbol{F})$.

Satz.
Sei $F : V \to W$ linear und V, W sind Vektorräume. Dann gilt:

(i) $F(0) = 0$, die Null wird immer auf die Null abgebildet

(ii) F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(W)$

(iii) F injektiv $\Leftrightarrow \ker(F) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

(iv) F ist ein Isomorphismus $\quad \Leftrightarrow \quad \dim(V) = \dim(W) = \mathrm{rang}(F)$

Satz.
Sind f, g linear Abbildungen $\quad \Rightarrow f \circ g$ ist eine lineare Abbildung.

Satz.
Sind f, g lineare Abbildungen, dann ist die Funktion $F := f \pm g$ die aus der Linearkombination von f, g entsteht wieder eine lineare Abbildung.

Definition.
Der Rang der linearen Abbildung F ist definiert als:

$$\mathrm{rang}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F)).$$

Bemerkung.
Der Rang der linearen Abbildung F ist gleich dem Rang ihrer Abbildungsmatrix $M(F)$.
Es gilt: $\qquad \mathrm{rang}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rang}(M(F)) = \mathrm{rang}(M(F)^T)$

Bemerkung.
Zeilenrang = Spaltenrang: $\qquad \mathrm{rang}(M(F)) = \mathrm{rang}(M(F)^T)$
Achtung: Im Allgemeinen gilt: $\qquad$ Spaltenraum $\neq$ Zeilenraum

Satz.
Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume eines grösseren Vektorraums (endlichdimensional $\Leftrightarrow \dim(V) = n < \infty$ und $\dim(W) = k < \infty$) und sei $f : V \to W$ linear, dann gelten die folgenden ***Dimensionsformeln***:

- $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$
- $n = \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Eigenschaften von linearen Abbildungen:
Seien V, W $\mathbb{E}$-Vektorräume und $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Sei $F : V \to W$ linear.

- $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}(F(v_1), ..., F(v_n))$, d.h. F ist eindeutig definiert durch die Werte der Basisvektoren
- Ist F injektiv und $v_1, ..., v_n \in V$ linear unabhängig, dann sind $F(v_1), ..., F(v_n) \in \mathrm{Im}(F)$ linear unabhängig
- $\dim(F) < \infty$ und F injektiv $\quad \Rightarrow \quad$ F ist bijektiv!

Beispiel 2:
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x - 1$.

F ist nicht linear, da $F(0) = -1 \neq 0$.

Bemerkung.
Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und die Vektorräume V,W sind endlichdimensional. Das Bild von f wir aufgespannt von den Spalten von $M(f)$, d.h.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{\text{Spalten von } M(f)\}$.

Bemerkung.
Sei $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und die dazugehörige Abbildungsmatrix $M(F)$. Dann gilt:

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(F)x = 0.$$

Beispiel 3:
Gegeben:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{s.d.} \quad M(F)x = F(x)$$

Gesucht: $\ker(F)$, Basis vom $\ker(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, Basis von $\mathrm{Im}(F)$

Um $\ker(F)$ zu berechnen, berechne die Zeilenstufenform von $M(F)$:

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{31}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(i)-\frac{1}{-2}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{M}(F)$$

Um Basis zu finden benutzen wir die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} & \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(F)) + \dim(\operatorname{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\ker(F)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\ker(F)) = 3 - 2 \\ & = 1 \end{aligned}$$

$\dim(\operatorname{Im}(F)) = \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(M(F)) = 2$ können wir direkt von $\widetilde{M}(F)$ ablesen. Dank der Dimensionsformel wissen, wir das die Basis vom Kern F einen Basisvektor enthält. Folgend werden die Lösungsmenge von $M(F)$ (bzw. $\widetilde{M}(F)$) berechnen, welche zugleich der $\ker(F)$ $=\ker(M(F))$ $=\ker(\widetilde{M}(F))$ ist, da wir das LGS $M(F)x = 0$ lösen.
(Wie ihr in der Übungsstunde gesehen habt, können wir die Vektoren, die im Kern liegen, auch mit Hilfe von $\widetilde{M}(F)$ "erraten".)

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(F) & \overset{\text{3. Zeile}}{\Rightarrow} \quad t := x_3, \ \ t \in \mathbb{R} \quad \text{freier Parameter} \\ \widetilde{M}(F) & \overset{\text{2. Zeile}}{\Rightarrow} \quad -2x_2 + 5x_3 = 0 \\ & \overset{t=x_3}{\Leftrightarrow} \quad -2x_2 + 5t = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2x_2 = 5t \\ & \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2}t \\ \widetilde{M}(F) & \overset{\text{1. Zeile}}{\Rightarrow} \quad 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ & \overset{t=x_3}{\Leftrightarrow} \quad 2x_1 + 3t = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2x_2 = -3t \\ & \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{2}t \\ \Longrightarrow \quad & \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ker(F) = \ker(M(F)) & = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \ \ x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Basis vom } \ker(F) \text{ ist zum Beispiel} : \mathcal{B}_{\ker(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Für das Bild $\operatorname{Im}(F)$ wissen wir wegen der Bemerkung von oben:

$$\operatorname{Im}(F) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Wähle aus den Spalten von $M(F)$ (Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(F)$) zwei Vektoren als Basis von $\mathrm{Im}(F)$, nämlich diejenigen die Pivotelemente in $\widetilde{M}(F)$ haben:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel 4:
Gegeben: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die folgende Matrix:

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Bestimme die Basen von $\ker(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$.

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \overset{(i)-\frac{2}{-3}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} =: \widetilde{M}(F)$$

Um die $\dim(\ker(F))$ zu finden benutzen wir die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} && \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow && \dim(\ker(F)) &= \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(F)) \\ \Leftrightarrow && \dim(\ker(F)) &= 3 - 2 \\ && &= 1 \end{aligned}$$

$\dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rang}(F) = \mathrm{rang}(M(F)) = 2$ können wir direkt von $\widetilde{M}(F)$ ablesen. Dank der Dimensionsformel wissen, wir das die Basis vom Kern F einen Basisvektor enthält.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ker(F) = \ker(M(F)) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Basis vom } \ker(F) \text{ ist zum Beispiel} : \mathcal{B}_{\ker(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Für das Bild $\mathrm{Im}(F)$ wissen wir wegen der Bemerkung von oben:

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Wähle aus den Spalten von $M(F)$ (Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(F)$) zwei Vektoren als Basis von $\mathrm{Im}(F)$, nämlich diejenigen die Pivotelemente in $\widetilde{M}(F)$ haben:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Abbildungsmatrix (darstellende Matrix; Spezialfall mit Standardbasis)
Gegeben: V, W ein Vektorraum, $F : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B}), v \mapsto F(v)$ und Basis von V mit $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ und die Standardbasis von W mit $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$
Gesucht: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$

1. Berechne für jeden Basisvektor $F(a_i),\ i \in \{1, ..., n\}$
2. Erstelle $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \underbrace{(F(a_1), ..., F(a_n))}_{n\text{-Spalten}} \}\quad m\text{-Zeilen}.$

   Wir haben die Abbildungsmatrix von F erhalten, wobei der Definitionsbereich bezüglich $\mathcal{A}$ und Bildbereich bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben ist.

Beispiel 5:
Sei $F = \frac{d}{dt} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, p \mapsto \dot{p} = \frac{dp}{dt}$.

(i) Zu zeigen: F ist eine lineare Abbildung.

Beweis: $\forall a, b \in \mathcal{P}_2,\ \lambda \in \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} F(a + \lambda b) &= \frac{d}{dt}(a + \lambda b) \\ &= \frac{d}{dt}a + \lambda \frac{d}{dt}b \\ &= F(a) + \lambda F(b) \qquad \square \end{aligned}$$

(ii) Finde die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ bezüglich der Monombasis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \in \mathcal{P}_2, \qquad p \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\dot{p} = \lambda_1 + 2\lambda_2 t \in \mathcal{P}_1, \qquad \dot{p} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\begin{aligned} 1 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 \\ t &\mathrel{\widehat{=}} e_2 \\ t^2 &\mathrel{\widehat{=}} e_3 \end{aligned}$$

$$\dot{p}(1) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t^2) \mathrel{\widehat{=}} \dot{p}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
Ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ ist durch die Funktionswerte $p(x_i)$ an $n+1$ paarweise verschiedenen Punkten $x_i \in \{1, ..., n\}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung.
Seien V, U, W $\mathbb{E}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$, $\dim(U) = k$ und $\dim(W) = \ell$, dann ist die Dimensionsregel für Verknüpfungen von linearen Abbildungen:

$$M(f) \in \mathbb{R}^{\ell \times n},\ M(g) \in \mathbb{R}^{k \times \ell} \quad \Rightarrow \quad M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) \in (\text{"}\mathbb{R}^{k \times \ell} \cdot \mathbb{R}^{\ell \times n}\text{"}) = \mathbb{R}^{k \times n}$$

3 Basiswechsel, Koordinatentransformation

Definition.
Seien $\mathcal{A} = (e_1, ..., e_n)$ die kanonische Basis vom Vektorraum V und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine weitere Basis von V beschrieben mit der kanonischen Basis. Dann existiert eine *Transformationsmatrix* mit:

$$T_A^B = (b_1| \ \cdots |b_n) \quad \text{ mit } e_i = T_A^B b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{T_B^A} V_{\mathcal{B}}$$

Bemerkung.
Es gilt die folgende Rechenregel: $\quad T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
Mit der obigen Definition erhalten wir somit: $\quad T_B^A e_i = b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$

Satz.
Sei $\mathbb{E}$ ein Körper, V ein $\mathbb{E}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Seien $v \in V$, $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ Basen für V. Dann existieren eindeutige $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{E}$ sowie eindeutige $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{E}$, so dass

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k.$$

Da stellt sich die Frage wie man zwischen den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wechseln kann, konkret hat man zum Beispiel die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{A}$ gegeben und möchte nun die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ darstellen.

Definition.
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ von V gibt es genau einen Isomorphismus:

$$\phi_B : \mathbb{E}^n \to V, (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \text{ mit } \ \phi_B(e_i) = v_i.$$

(In Worten: ϕ_B ordnet x seinen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ zu.)

Definition.
Seien V mit Basis $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_m\}$ und W mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ Vektorräume über $\mathbb{E}$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ genau eine Matrix $M_B^A(f)$, so dass $M_B^A(f)_j = f(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m$ für $j = 1, ..., n$.

Bemerkung.
Die Matrix $M_B^A(f)$ von oben hat als j-te Spalte den Vektor der Koordinaten von $f(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung. (Wichtig)
In den *Spalten* einer Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren, d.h. $M_B^A(f) = (f(v_1)| \cdots |f(v_m))$.

Bemerkung.
Die Matrix $M_B^A(f)$ kann mit Hilfe des kommutierenden Diagramms auch foglendermassen beschrieben werden:

$$M_B^A(f) = \phi_B^{-1} \circ f \circ \phi_A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^m \arrow[r, "M_B^A(f)"] \arrow[d, "\phi_A"] & \mathbb{E}^n \arrow[d, "\phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

Definition.
Die reguläre *Transformationsmatrix* $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ mit Basen $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$, $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ vom Vektorraum V sieht wie folgt aus:

$$T_\mathcal{B}^\mathcal{A} = \phi_B^{-1}\phi_A = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[rr, "T_B^A"] \arrow[dr, "\phi_A"] & & \mathbb{E}^n \arrow[dl, "\phi_B"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

Dadurch kann man nun folgend beschreiben $w_i = t_{1i}v_1 + ... + t_{ni}v_n = T_\mathcal{B}^\mathcal{A} v_i, \quad i \in \{1, ..., n\}$, wobei w_i bezüglich $\mathcal{B}$ und v_i bezüglich $\mathcal{A}$ dargestellt ist:

$$T_\mathcal{B}^\mathcal{A}\boldsymbol{v}_\mathcal{A} = \boldsymbol{w}_\mathcal{B}, \quad \text{wobei } \boldsymbol{v}_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \mathcal{A}, \ \boldsymbol{w}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \mathcal{B}.$$

Rechenregeln.

- $T_\mathcal{A}^\mathcal{A} = \mathbb{1}$
- $T_\mathcal{B}^\mathcal{A} = (T_\mathcal{A}^\mathcal{B})^{-1}$
- $\lambda_\mathcal{A} \in \mathbb{K}^n$ ein Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{A}$
  $\mu_\mathcal{B} \in \mathbb{K}^n$ ein Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$
  $\Rightarrow \quad T_\mathcal{B}^\mathcal{A}\lambda_\mathcal{A} = \mu_\mathcal{B}$
- $f : V \to V$ linear mit Abbildungsmatrix $M_A^A(f)$ wobei der Definitionsbereich und der Bildbereich bezüglich A gegeben ist. Analog ist die Abbildungsmatrix $M_B^B(f)$ im Definitionsbereich und im Bildbereich bezüglich B gegeben. Wir erreichen eine

Basistransformation von A nach B der Abbildungsmatrix $M_A^A(f)$ mit den Transformationsmatrizen $T_A^B,\ T_B^A$:

$$M_B^B(f) = T_B^A M_A^A(f) T_A^B$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M_B^B(f)"] \arrow[d, "\phi_B"] \arrow[dd, bend right, "T_A^B"'] & \mathbb{E}^n \arrow[d, "\phi_B"'] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{E}^n \arrow[u, "\phi_A"] \arrow[r, "M_A^A(f)"] & \mathbb{E}^n \arrow[u, "\phi_A"'] \arrow[uu, bend right, "T_B^A"']
\end{tikzcd}$$

- $f : V \to V$ linear mit Abbildungsmatrix $M_{B_2}^{B_1}(f)$ wobei der Definitionsbereich bezüglich B_1 und der Bildbereich bezüglich B_2 gegeben ist. Analog ist die Abbildugnsmatrix $M_{B_2'}^{B_1'}(f)$ im Definitionsbereich bezüglich B_1' und im Bildbereich bezüglich B_2' gegeben. Wir erreichen eine Basistransformation von B_1 nach B_1' (Definitionsbereich) bzw. von B_2 nach B_2' (Bildbereich) der Abbildungsmatrix $M_{B_2}^{B_1}(f)$ mit den Transformationsmatrizen $T_{B_2'}^{B_2},\ T_{B_1}^{B_1'}$:

$$M_{B_2'}^{B_1'}(f) = T_{B_2'}^{B_2} M_{B_2}^{B_1}(f) T_{B_1}^{B_1'}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M_{B_2'}^{B_1'}(f)"] \arrow[d, "\phi_{B_1'}"] \arrow[dd, bend right, "T_{B_1}^{B_1'}"'] & \mathbb{E}^n \arrow[d, "\phi_{B_2'}"'] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{E}^n \arrow[u, "\phi_{B_1}"] \arrow[r, "M_{B_2}^{B_1}(f)"] & \mathbb{E}^n \arrow[u, "\phi_{B_2}"'] \arrow[uu, bend right, "T_{B_2'}^{B_2}"']
\end{tikzcd}$$

Transformationsmatrix
Gegeben: $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ sind Basen von V.
Gesucht: Transformationsmatrix T_B^A und T_A^B.

$$(B \mid A) \Leftrightarrow (b_1 \quad \cdots \quad b_n \mid a_1 \quad \cdots \quad a_n) \text{ "Gaussen" } \overset{\text{ohne Zeilenvertauschung}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} (\mathbb{1} \mid T_B^A)$$

$$(A \mid B) \Leftrightarrow (a_1 \quad \cdots \quad a_n \mid b_1 \quad \cdots \quad b_n) \text{ "Gaussen" } \overset{\text{ohne Zeilenvertauschung}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} (\mathbb{1} \mid T_A^B)$$

Bemerkung. (Intuition)

$$(B \mid A) \rightsquigarrow \left(\underbrace{BB^{-1}}_{\mathbb{1}} \;\middle|\; \underbrace{AB^{-1}}_{=T_B^A} \right) \rightsquigarrow (\mathbb{1} \mid T_B^A)$$

Beispiel 5:

Gegeben: $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\}$

Gesucht: T_B^A, T_A^B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(ii)-l_{21}(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(iii)-l_{31}(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(iii)-l_{32}(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(iii)\cdot -\frac{3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(ii)-(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(i)-3\cdot(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & -5 & 7 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(i)-(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(i)\cdot\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad T_B^A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
$T_A^B = (T_B^A)^{-1}$ könnt ihr entweder mit dem Rezept von oben berechnen oder ihr benützt das Rezept aus der 3. Übungsstunde und berechnet die Inverse $(T_B^A)^{-1} = T_A^B$.

Beispiel 6:
Sei $V = \mathcal{P}$ mit Basen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ Standardbasis (Monombasis) und $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= x^2\\ a_2 &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\\ a_3 &= (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

a) T_B^A, T_A^B?

b) Sei $F = \frac{d}{dt} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, p \mapsto \dot{p} = \frac{dp}{dt}$ mit Abbildungsmatrix

$$M(F) = M_B^B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist $M_A^A(F)$?

c) Sei $p(x) = 3x^2 - 8x + 2 \in \mathcal{P}_2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

a) Da $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist, gilt: $T_B^A = (a_1|a_2|a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$T_A^B = (T_B^A)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{Zeilenvertauschungen}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(iii)-l_{32}(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(ii)-\frac{1}{-4}(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(i)-\frac{1}{-4}(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{(i)-(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{-\frac{1}{4}(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad T_A^B = (T_B^A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Unter Verwendung der Rechenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_A^A(F) &= T_A^B M_B^B(F) T_B^A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{B}$:

$$p_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{A}$:

$$p_{\mathcal{A}} = T_A^B p_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Test: $a_1 - a_2 + 3a_3 = 3x^2 - 8x + 2 = p(x)$ ✓

Definition.
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{E}^{m\times n}$ heissen *äquivalent*, wenn es $S \in \mathbb{E}^{m\times m}$ und $T \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gibt mit:

$$B = SAT^{-1}$$

Falls $m = n$ nennen wir $A, B \in \mathbb{E}^{m\times n}$ *ähnlich*, wenn es ein $S \in \mathbb{E}^{m\times m}$ gibt mit:

$$B = SAS^{-1}.$$