Lineare Algebra

12. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

December 12, 2019

1 Symmetrische Gruppe

Definition.
Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung:

$$p : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

Definition.
Die Menge aller Permutationen heisst *symmetrische Gruppe* S_n.

Definition.
Eine Permutation, welche nur zwei Elemente vertauscht heisst *Transposition*.

Satz
Jede Permutation kann als Produkt (hintereinanderschaltung von Abbildungen) von Transpositionen geschrieben werden.

Bemerkung.
Die Darstellung einer Permutation als Produkt von Transpositionen ist nicht eindeutig. Aber die Anzahl benötigter Transpositionen ist eindeutigerweise entweder gerade oder ungerade.

Definition.
Ist $p \in S_n$, so nennt man jedes Paar $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit

$$i < j \quad \text{aber} \quad p(i) > p(j),$$

einen *Fehlstand* von p.

Beispiel 1:
Gegeben:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Gesucht: Fehlstände von p

Lösung:
Es gibt insgesamt zwei Fehlstände, nämlich

$$1 < 3, \text{ aber } 2 > 1, \quad \text{und} \quad 2 < 3, \text{ aber } 3 > 1.$$

Definition.
Das *Signum* einer Permutation ist definiert als

$$\text{sign}(p) = (-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \text{ eine } \textit{gerade} \text{ Anzahl } k \text{ von Fehlständen hat} \\ -1, & \text{falls } p \text{ eine } \textit{ungerade} \text{ Anzahl } k \text{ von Fehlständen hat.} \end{cases}$$

Definition.
Man nennt $p \in S_n$:

- *gerade*, falls $\text{sign}(p) = +1$,
- *ungerade*, falls $\text{sign}(p) = -1$.

2 Determinanten

Definition.
Die *Determinante* ist eine Abbildung:

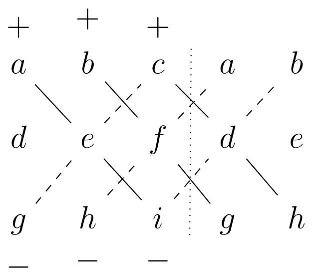
$$\det:\ \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{E}$$
$$A \mapsto \det(A) = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sign}(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$$

Bemerkung.
In der obigen Definition summieren wir über $n!$ Summanden.

Tricks um Determinanten zu berechnen.

- 1×1-Matrix: $\det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$
- 2×2-Matirx:
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$
- 3×3-Matrix (Regel von Sarrus):
$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

  Es wird das folgende Muster bei der Regel von Sarrus angewendet:



Bemerkung.
Für eine $n\times n$-Matrix kann man die Determinante über die Definition mit Permutationen berechnen, aber ist sehr ineffizient (Aufwand proportional zu $n!$).

Satz.
Sei $\widetilde{A}$ die Zeilenstufenform von A (d.h. $\widetilde{A}$ ist eine obere/untere Dreiecksmatrix), welche man durch den Gauss-Algorithmus aus A berechnet hat. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl ausgeführter Zeilenvertauschungen:

$$\Rightarrow \quad \det(A) = (-1)^k \cdot \det(\widetilde{A}) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ii},$$

$$\text{wobei } \prod_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ii} \text{ das Produkt der Diagonaleinträge ist.}$$

Satz. *Laplace'sche Entwicklungssatz*
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und $A'_{ij} \in \mathbb{E}^{n-1\times n-1}$ die Streichmatrix ohne i-te Zeile und j-te Spalte.

$$\Rightarrow \quad \text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile:} \qquad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

$$\Rightarrow \quad \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte:} \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}).$$

Beispiel 2:
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $\det(A)$

Lösung:

(1) *Sarrus:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (-1) \cdot +2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -5 - 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -5 - 30 \\ &= -35 \end{aligned}$$

(2) *Gauss:*

- ohne Zeilenvertauschung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =: \widetilde{A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A) &= \det(\widetilde{A}) \\ &= 1 \cdot (-7) \cdot 5 \\ &= -35 \end{aligned}$$

- mit Zeilenvertauschung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{Zeilenvertauschung}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -15 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(ii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{23}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} =: \widetilde{A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A) &= (-1) \cdot \det(\widetilde{A}) \\ &= (-1) \cdot [1 \cdot (-1) \cdot (-35)] \\ &= -35 \end{aligned}$$

(3) *Laplace:*

(i) Entwicklung nach der letzten Spalten (am effizientesten):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix} &= 5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ &= 5((-1)\cdot 1 - 3\cdot 2)\\ &= 5\cdot(-7)\\ &= -35\end{aligned}$$

(ii) Entwicklung nach der ersten Zeile (dient nur zur Illustration, da ineffizient):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 5\\ &= -5 - 30\\ &= -35\end{aligned}$$

Satz. *Axiomatischer Zugang, Eigenschaften der Determinante.*
Die Abbildung

$$\begin{aligned}\det : \mathbb{E}^{n\times n} &\to \mathbb{E}\\ A &\mapsto \det(A)\end{aligned}$$

heisst *Determinante*, falls folgende Eigenschaften gelten: Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, dann gilt:

(D1) $\det(\mathbb{1}) = 1$

(D2) Hat A zwei gleiche oder lineare abhängige Zeilen/Spalten, so ist

$$\det(A) = 0$$

(D3) Linearität in jeder Zeile/Spalte (in der Literatur auch n-Linearität genannt)

$$\det(v_1, ..., \lambda v_i + w, ..., v_n) = \lambda\det(v_1, ..., v_i, ..., v_n) + \det(v_1, ..., w, ..., v_n)$$

Die Determinante hat folgende weitere Eigenschaften, die sich aus den ersten Drei herleiten lassen:

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{E}$

(D5) Ist eine Zeile/Spalte gleich Null, so ist:

$$\det(A) = 0$$

(D6) Vertauscht man zwei Zeilen/Spalten von A, so ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$:

$$\det(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -\det(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$$

(D7) Entsteht B aus A durch Addition des λ-fachen ($\lambda \neq 0$) der i-ten zur j-ten Zeile/Spalte, dann ist:

$$\det(A) = \det(B)$$

(D8) Ist A eine obere/untere Dreiecksmatrix, so ist:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(D9) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(D10) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

(D11) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(D12) $\det(A^T) = \det(A)$

(D13) Ist

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{so ist:} \quad \det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_3)$$

und analog gilt:

$$\det \begin{pmatrix} B_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & B_n \end{pmatrix} = \det(B_1) \cdot ... \cdot \det(B_n)$$

(D14) $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, wobei λ_i ein Eigenwert von A ist.

(D15) Definition der Determinante ist *Basisinvariant*:

$$\det(B) = \det(S^{-1}BS) = \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(B) \cdot \det(S)$$

(D16) Orthogonale/unitäre Matrizen A haben:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \pm 1, \\ \text{weil } \det(AA^T) &= \det(A)\det(A^T) \\ &= \det(A)\det(A) \\ &= \det(A)^2 \\ &\overset{!}{=} \det(\mathbb{1}) = 1 \end{aligned}$$

(D17) Für hermitesche Matrizen ($A^H = A$) haben wir:

$$\begin{aligned} \det(A) &\in \mathbb{R}, \\ \text{weil } \det(A^H) &= \det(\overline{A}^T) \\ &= \det(\overline{A}) \\ &= \overline{\det(A)} \\ &\overset{!}{=} \det(A) \end{aligned}$$

Satz.

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ nicht invertierbar $\Leftrightarrow \text{rang}(A) < n$
- $Ax = b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Definition.
Zu jedem Element a_{kl} einer $n \times n$-Matrix A werde die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix $A_{[k,l]}$ definiert durch Streichen der Zeile k und der Kolonne l von A. Der *Kofaktor* κ_{kl} von a_{kl} ist dann die Zahl:

$$\kappa_{kl} := (-1)^{k+l} \det\left(A_{[k,l]}\right).$$

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei in diesem Abschnitt V ein Vektorraum über $\mathbb{E}$, $\dim(V) = n < \infty$, $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$.

Definition.

- $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst *Eigenwert* (EW) von $A \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in V \setminus \{0\}: \quad Av = \lambda v$.
- $v \in V \setminus \{0\}$ heisst dann *Eigenvektor* (EV) von A zum Eigenwert λ.
- $E_\lambda(A) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$ heisst *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ.
- $\sigma(A) := \{\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwerte von } A\}$ heisst *Spektrum* von A.

Bemerkung.
$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda\mathbb{1})$ ist ein *nichttrivialer* Untervektorraum von V, d.h. es gilt:

$$\{0\} \subsetneq E_\lambda(A) \quad \text{(echt grösser als nur der Nullraum)}$$

Bemerkung.
Diese Definition lässt sich analog für eine lineare Abbildung $F : V \to V$ führen. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } F,\ v \text{ ist ein Eigenvektor von} F \\ \Leftrightarrow\ & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A,\ v \text{ ist ein Eigenvektor von } A, \\ & \text{wobei } \ A \text{ die Abbildungsmatrix von } F \text{ bezeichnet.} \end{aligned}$$

Bemerkung. *Herleitung des charakteristischen Polynoms* χ_A.
Betrachte

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \quad & \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})v = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$v = 0$ löst (1), aber $v = 0$ ist als Eigenvektor nicht zugelassen. Wir fordern mehr Lösungen, d.h. ∞ viele Lösungen (da ein LGS immer $0, 1$ oder ∞ viele Lösungen hat). Gemäss dem Satz aus der Erinnerung können wir dies , indem wir $\det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$ setzen, weil

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0 \quad & \overset{\text{Satz}}{\Leftrightarrow} \quad A - \lambda\mathbb{1} \text{ singulär} \\ & \Rightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})v = 0 \text{ hat } \infty \text{ viele Lösungen, da } v = 0 \text{ nicht zugelassen ist.} \end{aligned}$$

Definition.
$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$ heisst *charakteristisches Polynom.*

Bemerkung.

- $\chi_A(\lambda)$ hat Grad n
- λ ist der Eigenwert von A
  $\Leftrightarrow \lambda$ ist eine Nullstelle (NST) des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$.

Bemerkung. *Mitternachtsformel* (auswendig)

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$
(falls $F : V \to V$ lineare Abbildung gegeben ist, finde zuerst die Abbildungsmatrix A)
Gesucht: $\sigma(A)$ (d.h. $\forall$ Eigenwerte von A), $E_\lambda(A)$ mit $\forall\lambda \in \sigma(A)$

1) Berechne $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$

2) Setze $\chi_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n \text{ Nullstellen } \lambda_1, ..., \lambda_n \\ &\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \end{aligned}$$

   Bemerkung. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sind nicht zwingend verschieden, sondern mit Nullstellenvielfachheit gezählt.

3) Für jeden verschiedenen Eigenwert λ_k bestimme die Basis von $E_{\lambda_k}(A) = \ker(A - \lambda_k\mathbb{1})$ mit Hilfe von der Gauss-Elimination.

4) Die Menge der Eigenvektoren ist

$$\operatorname{span}\left\{\bigcup_k \text{Basis von } E_{\lambda_k}(A)\right\} \setminus \{0\}$$

   (Wir vereinigen alle Eigenräume minus den Nullvektor)

Beispiel 3:
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Eigenwerte, Eigenvektoren von A

Lösung:

1)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 4 & (3-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & (5-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) \cdot 4 \cdot 2 \\
&= (5-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2] \\
&= (5-\lambda)[3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8] \\
&= (5-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 5] \\
&= (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) \quad \text{(allenfalls mit Hilfe der Mitternachtsformel)} \\
&= -(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda+1) \\
&= -(\lambda-5)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& & \chi_A(\lambda) &\stackrel{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow & -(\lambda-5)^2(\lambda+1) &= 0 \\
&\Rightarrow & \lambda_1 = \lambda_2 &= 5 \qquad \text{(Später: algebraische Vielfachheit von 5 ist 2)} \\
& & \lambda_3 &= -1 \\
&\Rightarrow & \sigma(A) &= \{5, -1\}
\end{aligned}$$

3)

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$:

$$E_5(A) = \ker(A - 5 \cdot \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\lambda_3 = -1$:

$$E_{-1}(A) = \ker(A - (-1) \cdot \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4) Menge der Eigenvektoren:

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}\setminus\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Bemerkung.
Es wäre mathematisch unpräzis in Beispiel 3 zu sagen: "Die Eigenvektoren sind $(1,2,0)^T$ und $(1,-1,0)^T$". Denn es gibt ∞ viele Eigenvektoren.
Sei zum Beispiel v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, d.h. $Av = \lambda v$
$\Rightarrow c \cdot v$ ist ein Eigenvektor von A zu λ für alle $c \in \mathbb{E}$, da auch $A(cv) = \lambda(cv)$ gilt.
Meist genügt es trotzdem, einen Basisvektor: $v \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ als "repräsentativen Eigenvektor zu nehmen.

4 Spektralzerlegung, Diagonalisierbarkeit

Definition.
Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$.

- *Algebraische Vielfachheit* von λ:

$$a_\lambda := \text{"Nullstellen vielfachheit von } \lambda \text{ in } \chi_A(\lambda)\text{"}$$

- *Geometische Vielfachheit*:

$$\begin{aligned} g_\lambda &:= \dim(E_\lambda(A)) \\ &= \dim(\ker(A - \lambda\mathbb{1})) \\ &= n - \operatorname{rang}(A - \lambda\mathbb{1}) \end{aligned}$$

Definition.
A heisst *diagonalisierbar* (es existiert eine Spektralzerlegung)

$$\Leftrightarrow \quad \exists V \in \mathbb{E}^{n\times n},\ \Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n},\ \text{mit } V \text{ regulär, } \Lambda \text{ diagonal, so dass } A = V\Lambda V^{-1}$$

Man sagt auch: "A ist *ähnlich* zu einer Diagonalmatrix".

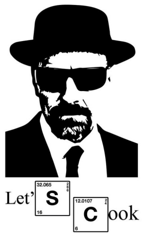
Satz.
A ist diagonalisierbar
$\Leftrightarrow$ Die Eigenvektoren von A bilden eine Basis von V
$\Leftrightarrow$ Für alle Eigenwerte λ von A gilt $g_\lambda = a_\lambda$.

Bemerkung.
Eine Diagonalisiertung ist ein Basiswechsel mit Transformationsmatrizen V und V^{-1}.

Satz.
Bei Ähnlichkeitstransformation bleibt erhalten:

- Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit

- Rang
- Determinante
- Spur
- Charakteristische Polynom $\chi_A(t)$
- ***nicht*** die Eigenvektoren!



Berechnung der Diagonalmatrix
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ diagonalisierbar
Gesucht: $V, \Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n}$

1) Finde die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und finde die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ von A (wobei $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ und $\{v_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig).
2) Definiere die Diagonalmatrix wie folgt:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$$

3) Schreibe die Eigenvektoren $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ in eine Matrix:

$$V = (v_1 | \cdots | v_n)$$

4) Test: $A \stackrel{?}{=} V\Lambda V^{-1}$

Beispiel 3: *fortgesetzt...*
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{wie in Beispiel 1 mit } \chi_A(\lambda) = -(\lambda - 5)^2(\lambda + 1)$$

Gesucht: Algebraische und geometrische Vielfachheit

Lösung:

- Algebraische Vielfachheit:

$$\lambda_1 = 5 \text{ mit } a_5 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -1 \text{ mit } \ a_{-1} = 1$$

- Geometrische Vielfachheit:

$$
\begin{aligned}
g_5 = & \ \dim(E_5(A)) = 1 \quad \neq a_5 = 2 \\
g_{-1} = & \ \dim(E_{-1}(A)) = 1 \quad = a_{-1} = 1
\end{aligned}
$$

Da $g_5 \neq a_5 \Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.

Beispiel 4:
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Finde die Spektralzerlegung.

Lösung:

1) (i)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(-2-\lambda)(3-\lambda) + (-1)\cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) \cdot (-2) \\
&\quad - (-2)\cdot(-2-\lambda)\cdot 1 - (-2)\cdot 3 \cdot (-\lambda) - (3-\lambda)\cdot(-3)\cdot(-1) \\
&= 6\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 6 + 6 - 4 - 2\lambda - 6\lambda - 9 + 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1
\end{aligned}$$

Bemerkung. Hier müsst ihr ein Trick verwenden, indem ihr die Nullstelle erratet (teste: $1, -1, 2, -2$, etc.) und dann eine Polynomdivision durchführt.

$\lambda_1 = 1$ ist eine Nullstelle:

$$\begin{array}{l}
\big(-t^3 + t^2 + t - 1\big) : \big(t - 1\big) = -t^2 + 1 \\
\underline{\;\; t^3 - t^2 \;\;} \\
\qquad\qquad t - 1 \\
\qquad\quad \underline{-t + 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) &= (\lambda - 1)(1 + \lambda^2) \\
&= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \\
\Rightarrow \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad a_1 = 2 \\
& \lambda_3 = -1, \quad a_{-1} = 1 \\
\Rightarrow \quad & \sigma(A) = \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

(iii) • $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \ker(A - \mathbb{1}) \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_1 = 2$$

• $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \ker(A + \mathbb{1}) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_{-1} = 1$$

$\Longrightarrow \quad a_1 = g_1$ und $a_{-1} = g_{-1} \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

(iv) Menge der Eigenvektoren:

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei ihr die Inverse V^{-1} mit dem üblichen Rezept berechnet.

4) Test: $\quad A = V\Lambda V^{-1} \checkmark$

Bemerkung.
Komplexwertige Nullstellen des Charakteristischen Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer paarweise auf, und zwar ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch λ eine Nullstelle. Somit muss eine orthogonale Matrix von ungerader Dimension mindestens einen reellen Eigenwert ± 1 besitzen.

Defiinition.
Die Summe der Diagonalelemente von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ nennt man *Spur* von A:

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

Lemma 9.6
Eine (quadratische) Matrix A ist genau dann singulär, wenn sie 0 als Eigenwert hat:

$$A \text{ singuär} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \sigma(A).$$

Satz 9.11
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Korollar 9.12
Sind die n Eigenwerte von $F : V \to V$ (mit $n = \dim(V)$) verschieden, so gibt es eine Basis von Eigenvektoren und die entsprechende Abbildungsmatrix ist diagonal.

Satz 9.15
Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so gilt:

(i) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sind reell.

(ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}$.

(iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, ..., u_n$ von A.

(iv) Für die unitäre Matrix $U := (u_1, ..., u_n)$ gilt:

$$U^H A U = \Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$