Lineare Algebra

# 13. Übungsstunde

*Steven Battilana*
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

December 19, 2019

# 1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei in diesem Abschnitt $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{E}$, $\dim(V) = n < \infty$, $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$.

**Definition.**

- $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst *Eigenwert* (EW) von $A \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in V \setminus \{0\} : \quad Av = \lambda v$.
- $v \in V \setminus \{0\}$ heisst dann *Eigenvektor* (EV) von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.
- $E_\lambda(A) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$ heisst *Eigenraum* von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.
- $\sigma(A) := \{\lambda \mid \lambda$ Eigenwerte von $A\}$ heisst *Spektrum* von $A$.

**Bemerkung.**
$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda\mathbb{1})$ ist ein *nichttrivialer* Untervektorraum von $V$, d.h. es gilt:

$$\{0\} \subsetneq E_\lambda(A) \quad \text{(echt grösser als nur der Nullraum)}$$

**Bemerkung.**
Diese Definition lässt sich analog für eine lineare Abbildung $F : V \to V$ führen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } F,\ v \text{ ist ein Eigenvektor von} F \\
\Leftrightarrow\ & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A,\ v \text{ ist ein Eigenvektor von } A, \\
& \text{wobei } A \text{ die Abbildungsmatrix von } F \text{ bezeichnet.}
\end{aligned}$$

**Bemerkung.** *Herleitung des charakteristischen Polynoms* $\chi_A$.
Betrachte

$$\begin{aligned}
Av = \lambda v \quad & \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})v = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$v = 0$ löst (1), aber $v = 0$ ist als Eigenvektor nicht zugelassen. Wir fordern mehr Lösungen, d.h. $\infty$ viele Lösungen (da ein LGS immer $0, 1$ oder $\infty$ viele Lösungen hat). Gemäss dem Satz aus der Erinnerung können wir dies , indem wir $\det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$ setzen, weil

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0 \quad & \overset{\text{Satz}}{\Leftrightarrow} \quad A - \lambda\mathbb{1} \text{ singulär} \\
& \Rightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})v = 0 \text{ hat } \infty \text{ viele Lösungen, da } v = 0 \text{ nicht zugelassen ist.}
\end{aligned}$$

**Definition.**
$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$ heisst *charakteristisches Polynom*.

**Bemerkung.**

- $\chi_A(\lambda)$ hat Grad $n$
- $\lambda$ ist der Eigenwert von $A$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda$ ist eine Nullstelle (NST) des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$.

**Bemerkung.** *Mitternachtsformel* (auswendig)

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
\Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$


**Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren**
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
(falls $F : V \to V$ lineare Abbildung gegeben ist, finde zuerst die Abbildungsmatrix $A$)
Gesucht: $\sigma(A)$ (d.h. $\forall$ Eigenwerte von $A$), $E_\lambda(A)$ mit $\forall \lambda \in \sigma(A)$

1) Berechne $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$

2) Setze $\chi_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow n \text{ Nullstellen } \lambda_1, ..., \lambda_n \\
&\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}
\end{aligned}
$$

   *Bemerkung.* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sind nicht zwingend verschieden, sondern mit Nullstellenvielfachheit gezählt.

3) Für jeden verschiedenen Eigenwert $\lambda_k$ bestimme die Basis von $E_{\lambda_k}(A) = \ker(A - \lambda_k \mathbb{1})$ mit Hilfe von der Gauss-Elimination.

4) Die Menge der Eigenvektoren ist

$$
\text{span}\left\{ \bigcup_k \text{Basis von } E_{\lambda_k}(A) \right\} \setminus \{0\}
$$

   (Wir vereinigen alle Eigenräume minus den Nullvektor)

**Beispiel 1:**
Gegeben:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

Gesucht: Eigenwerte, Eigenvektoren von $A$

*Lösung*:

1)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 4 & (3-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & (5-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) \cdot 4 \cdot 2 \\
&= (5-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2] \\
&= (5-\lambda)[3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8] \\
&= (5-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 5] \\
&= (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) \quad \text{(allenfalls mit Hilfe der Mitternachtsformel)} \\
&= -(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda+1) \\
&= -(\lambda-5)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& & \chi_A(\lambda) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow & & -(\lambda-5)^2(\lambda+1) &= 0 \\
& \Rightarrow & \lambda_1 = \lambda_2 &= 5 \qquad \text{(Später: algebraische Vielfachheit von 5 ist 2)} \\
& & \lambda_3 &= -1 \\
& \Rightarrow & \sigma(A) &= \{5, -1\}
\end{aligned}$$

3)
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$:

$$E_5(A) = \ker(A - 5 \cdot \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\lambda_3 = -1$:

$$E_{-1}(A) = \ker(A - (-1) \cdot \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4) Menge der Eigenvektoren:

$$\operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**Bemerkung.**
Es wäre mathematisch unpräzis in Beispiel 1 zu sagen: "Die Eigenvektoren sind $(1,2,0)^T$ und $(1,-1,0)^T$". Denn es gibt $\infty$ viele Eigenvektoren.
Sei zum Beispiel $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$, d.h. $Av = \lambda v$
$\Rightarrow c \cdot v$ ist ein Eigenvektor von $A$ zu $\lambda$ für alle $c \in \mathbb{E}$, da auch $A(cv) = \lambda(cv)$ gilt.
Meist genügt es trotzdem, einen Basisvektor: $v \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ als "repräsentativen Eigenvektor zu nehmen.

# 2 Spektralzerlegung, Diagonalisierbarkeit

**Definition.**
Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$.

- *Algebraische Vielfachheit* von $\lambda$:

$$a_\lambda := \text{"Nullstellen vielfachheit von } \lambda \text{ in } \chi_A(\lambda)\text{"}$$

- *Geometische Vielfachheit*:

$$\begin{aligned} g_\lambda &:= \dim(E_\lambda(A)) \\ &= \dim(\ker(A - \lambda \mathbb{1})) \\ &= n - \operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) \end{aligned}$$

**Definition.**
$A$ heisst *diagonalisierbar* (es existiert eine Spektralzerlegung)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \exists V \in \mathbb{E}^{n\times n},\ \Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n},\ \text{mit } V \text{ regulär, } \Lambda \text{ diagonal, so dass} \\ & A = V\Lambda V^{-1} \end{aligned}$$

Man sagt auch: "$A$ ist *ähnlich* zu einer Diagonalmatrix".

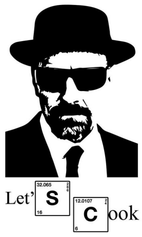
**Satz.**
$A$ ist diagonalisierbar
$\Leftrightarrow$ Die Eigenvektoren von $A$ bilden eine Basis von $V$
$\Leftrightarrow$ Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $g_\lambda = a_\lambda$.

**Bemerkung.**
Eine Diagonalisiertung ist ein Basiswechsel mit Transformationsmatrizen $V$ und $V^{-1}$.

**Satz.**
Bei Ähnlichkeitstransformation bleibt erhalten:

- Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit
- Rang
- Determinante
- Spur
- Charakteristische Polynom $\chi_A(t)$

- ***nicht*** die Eigenvektoren!




**Berechnung der Diagonalmatrix**
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ diagonalisierbar
Gesucht: $V, \Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n}$

1) Finde die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und finde die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ von $A$ (wobei $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ und $\{v_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig).

2) Definiere die Diagonalmatrix wie folgt:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$$

3) Schreibe die Eigenvektoren $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ in eine Matrix:

$$V = (v_1 | \cdots | v_n)$$

4) Test: $A \stackrel{?}{=} V \Lambda V^{-1}$

**Beispiel 1:** *fortgesetzt...*
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{wie in Beispiel 1 mit } \chi_A(\lambda) = -(\lambda - 5)^2(\lambda + 1)$$

Gesucht: Algebraische und geometrische Vielfachheit

*Lösung*:

- Algebraische Vielfachheit:

$$\lambda_1 = 5 \text{ mit } a_5 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -1 \text{ mit } \ a_{-1} = 1$$

- Geometrische Vielfachheit:

$$\begin{aligned} g_5 = & \ \dim(E_5(A)) = 1 \quad \neq a_5 = 2 \\ g_{-1} = & \ \dim(E_{-1}(A)) = 1 \quad = a_{-1} = 1 \end{aligned}$$

Da $g_5 \neq a_5 \Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.

**Beispiel 2:**
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Finde die Spektralzerlegung.

*Lösung*:

1) (i)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(-2-\lambda)(3-\lambda) + (-1)\cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) \cdot (-2) \\
&\quad - (-2)\cdot(-2-\lambda)\cdot 1 - (-2)\cdot 3 \cdot (-\lambda) - (3-\lambda)\cdot(-3)\cdot(-1) \\
&= 6\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 6 + 6 - 4 - 2\lambda - 6\lambda - 9 + 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Hier müsst ihr ein Trick verwenden, indem ihr die Nullstelle erratet (teste: $1, -1, 2, -2$, etc.) und dann eine Polynomdivision durchführt.

$\lambda_1 = 1$ ist eine Nullstelle:

$$\begin{array}{l}
\big(-t^3 + t^2 + t - 1\big) : \big(t - 1\big) = -t^2 + 1 \\
\underline{\;\;t^3 - t^2\;\;} \\
\qquad\qquad t - 1 \\
\qquad\quad \underline{-t + 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) &= (\lambda - 1)(1 + \lambda^2) \\
&= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \\
\Rightarrow \quad \lambda_1 &= \lambda_2 = 1, \quad a_1 = 2 \\
\lambda_3 &= -1, \quad a_{-1} = 1 \\
\Rightarrow \quad \sigma(A) &= \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

(iii) • $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \ker(A - \mathbb{1}) \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_1 = 2$$

• $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \ker(A + \mathbb{1}) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_{-1} = 1$$

$\Longrightarrow \qquad a_1 = g_1$ und $a_{-1} = g_{-1} \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

(iv) Menge der Eigenvektoren:

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei ihr die Inverse $V^{-1}$ mit dem üblichen Rezept berechnet.

4) Test: $\qquad A = V\Lambda V^{-1}$✓

**Bemerkung.**
Komplexwertige Nullstellen des Charakteristischen Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer paarweise auf, und zwar ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\lambda$ eine Nullstelle. Somit muss eine orthogonale Matrix von ungerader Dimension mindestens einen reellen Eigenwert $\pm 1$ besitzen.

**Defiinition.**
Die Summe der Diagonalelemente von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ nennt man *Spur* von $A$:

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + ... + a_{nn}.$$

**Lemma 9.6**
Eine (quadratische) Matrix $A$ ist genau dann singulär, wenn sie 0 als Eigenwert hat:

$$A \text{ singuär} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \sigma(A).$$

**Satz 9.11**
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

**Korollar 9.12**
Sind die n Eigenwerte von $F : V \to V$ (mit $n = \dim(V)$) verschieden, so gibt es eine Basis von Eigenvektoren und die entsprechende Abbildungsmatrix ist diagonal.

**Satz 9.15**
Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so gilt:

(i) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sind reell.

(ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}$.

(iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, ..., u_n$ von $A$.

(iv) Für die unitäre Matrix $U := (u_1, ..., u_n)$ gilt:

$$U^H A U = \Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

# 3 Singulärwertzerlegung

**Satz.**
Sei $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ symmetrisch ($A^T = A$) oder hermitesch ($A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T} = A$), dann gilt:

(i) $A$ hat nur reelle Eigenwerte

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal

**Bemerkung 1.**
Um einen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren einer symmetisch/hermiteschen Matrix zu erhalten, muss man die Eigenvektoren nur normieren und gegebenenfalls mit Gram-Schmidt orthogonalisieren (macht man falls es einen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $> 1$ gibt).

**Satz.** *Singulärwertzerlegung*
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $\text{rang}(A) =: r \leq \min\{m, n\}$. Dann existieren $U \in \mathbb{E}^{m\times m}$ orthogonal/unitär, $V \in \mathbb{E}^{n\times n}$ orthogonal/unitär, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{r} & \underbrace{\mathbf{0}}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, m-r \end{matrix}, \qquad \text{mit } \Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r > 0$$

eine verallgemeinerte Diagonalmatrix mit *Singulärwerten* $\sigma_1, ..., \sigma_r$ ist, so dass $A = U\Sigma V^H$, d.h. $A$ besitzt eine Singulärwertezerlegung.

**Satz.**
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$.

$$\begin{aligned} A^H A &= (U\Sigma V^H)^H U\Sigma V^H \\ &= V \underbrace{\Sigma^H}_{=\Sigma^T;} \underbrace{U^H U}_{=\mathbb{1}_n \text{ da } U \text{ unitär}} \Sigma V^H \\ &= V\Sigma^T\Sigma V^H \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^H A$ ist ähnlich zu (im Sinne von unitärer Spektralzerlegung) zu

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$\Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, wobei $\lambda_i$ die positiven reellen Eigenwerte von $A^H A$ sind.

**Anwendung.**

1) Die Singulärwertzerlegung ist gewissermassen eine Verallgemeinerung von der Spektralzerlegung für Rechtecksmatrizen.
2) Singuläre LGS und Ausgleichsprobleme (kleinste Quadrate) lösen.
3) Bildkompressionsverfahren. Dabei wird ein Bilde als Matrix von Farbwerten betrachtet, wovon die Singulärwertzerlegung berechnet wird. Bei der Rücktransformation von $U\Sigma V^H$ nach $A$ werden aber nur noch die "stark von 0 abweichenden" Singulärwerte gespeichert, im Betrag kleine Singulärwerte werden vernachlässigt.

**Singulärwertzerlegung**
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $m \geq n$ (sonst betrachte $A^H$)
Gesucht: $U \in \mathbb{E}^{m\times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}, V \in \mathbb{E}^{n\times n}$

1) Berechne $B = A^H A \in \mathbb{E}^{n\times n}$

2) Berechne die Eigenwerte von $B$, "nummeriere" sie der Grösse nach:

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0,$$

wobei $r = \text{rang}(B) = \text{rang}(A^H A)$

3)

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4) Bilde die Orthonormalbasis $\{w_1, ..., w_n\}$ mit Gram-Schmidt mit Eigenvektoren $\{v_1, ..., v_n\}$ von $B$. (Betrachte $B = A^H A$ ist hermitesch, d.h. verwende Bemerkung 1)

$$\Rightarrow \quad V = (w_1|\cdots|w_n)$$

5)

$$\forall i \in \{1, ..., r\} \text{ definiere } \quad u_1 := \frac{1}{\sigma_i} A w_i \quad \Rightarrow \quad u_i \text{ sind orthonormal/unitär}$$

Ergänze $\{u_1, ..., u_r\}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{E}^{m\times m}$ mit Gram-Schmidt

$$\Rightarrow \quad U = (u_1|...|u_m)$$

6) Test: $\quad A \stackrel{?}{=} U\Sigma V^H \quad \checkmark$

**Beispiel 3:**
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $U, \Sigma, V$ so dass $A = U\Sigma V^H$; Zusatzfrage: Beschreibe die vier Fundamentalräume gemäss Satz 11.1 (siehe Skirpt).

1)

$$B = A^H A = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Eigenwerte berechnen von $B$:

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 6) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 6 > \lambda_2 = 1$$

3)

$$\sigma_1 = \sqrt{6}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$E_6 = \ker(B - 6\mathbb{1}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{normieren}}{\rightsquigarrow} w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \ker(B - \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{\text{normieren}}{\rightsquigarrow} w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_3} &= e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1 - \langle e_2, u_2 \rangle u_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{30}} \frac{1}{\sqrt{30}} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{\widetilde{u_3}}{\|\widetilde{u_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

6) Test: $A = U\Sigma V^H \quad \checkmark$

7) Die vier Fundamentalräume:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(A) &= \{u_1, u_2\} \\
\mathrm{im}(A^H) &= \{w_1, w_2\} \\
\ker(A^H) &= \{u_3\} \\
\ker(A) &= \{\}
\end{aligned}$$

**Beispiel 4:** Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $U, \Sigma, V$ so dass $A = U\Sigma V^H$

Lösung:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$