Analysis I

1. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

February 22, 2020

1 Wiederholung: Komplexe Zahlen

Bemerkung.
$z^2 + 1 = 0$ ist ein Beispiel für eine in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung. Um eine Lösung zu finden erweitern wir deshalb den Körper auf $\mathbb{R}^2$ und nennen dies **Körper** (engl. Field, wird in der diskreten Mathematik im 5. Kapitel *Algebra* genauer behandelt) **der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

Definition 1.1: ***imaginäre Einheit***

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i &\mathrel{\widehat{=}} \text{die imaginäre Einheit} \end{aligned}$$

Definition 1.2: ***kartesische Form***

$$z = x + iy$$

Definition 1.3: ***Real- und Imaginärteil***

$$\begin{aligned} Re(z) &:= x \in \mathbb{R} \quad \widehat{=} \text{ Realteil} \\ Im(z) &:= y \in \mathbb{R} \quad \widehat{=} \text{ Imaginärteil} \end{aligned}$$

Definition 1.4: ***Konjugation***

Die Konjugation von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei

$$\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}.$$

Die Konjugation hat die folgenden *Eigenschaften*:

(i) Für alle $z = x + iy = (x, y), z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt

- $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \|z\|^2$.

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Satz 1

Weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen. Sei $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt folgendes

(i) $\|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\|$

(ii) $\|\frac{z}{w}\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}, w \neq 0$

(iii) $\|z\| = \|\overline{z}\|$

(iv) $\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

Definition 1.5: ***Euler Formel***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Definition 1.6: ***Polarform***

Die *Polarform* von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei (Achtung! $\varphi \in (-\pi, \pi]$)

$$\begin{aligned} & z = re^{i\varphi}, \\ \overset{\text{Euler Formel}}{\Leftrightarrow} \quad & z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ \text{mit} \quad & r = \|z\|, \\ & x = r\ \cos\varphi, \\ & y = r\ \sin\varphi. \end{aligned} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{undefiniert}, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Bemerkung.
Die Berechnung des Winkels φ' im Intervall $(0, 2\pi]$ kann im Prinzip so durchgeführt werden, dass der Winkel zunächst wie vorstehend beschrieben im Intervall $(-\pi, \pi]$ berechnet wird und, nur falls er negativ ist, noch um 2π vergrössert wird:

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi + 2\pi, & \varphi < 0 \\ \varphi, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Bemerkung.
Alternativ zu arctan kann die Berechnung von φ auch über den sinus und cosinus erfolgen:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{r} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \sin(\varphi) &= \frac{y}{r} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \end{aligned}$$

Bemerkung. (Ausblick).
$z^2+1 = 0$ ist ein Beispiel für eine in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung, die in $\mathbb{C}$ Lösungen hat (nämlich $z = \pm i$). Allgemein gilt der **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. Das heisst, $\mathbb{C}$ ist im Unterschied zu $\mathbb{R}$ **algebraisch vollständig**.

Beispiel 1.1. Berechne: $\frac{6+7i}{3-8i}$

Lösung.

$$\frac{6+7i}{3-8i} = \frac{6+7i}{3-8i} \cdot \frac{3+8i}{3+8i} = \frac{18+21i+48i+56i^2}{9-64i^2} = \frac{18+21i+48i-56}{9+64} = \frac{-38+69i}{73}$$

Beispiel 1.2. Berechne die Polarform von $z = 1 + i$.

Lösung.

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow z &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.3. Berechne die kartesische Form von $7e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Lösung.

$$7e^{i\frac{\pi}{3}} = 7(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 7 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} i$$

Beispiel 1.4. Zeichnen Sie die folgenden Mengen grafisch in der komplexen Ebene:

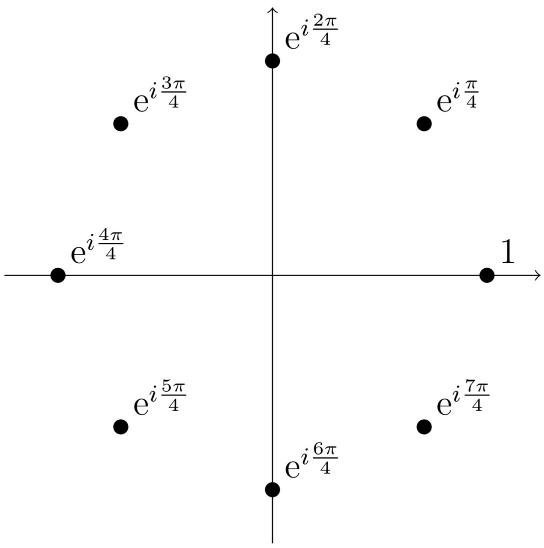
$$D := \left\{ n \in \mathbb{N} \ \ : \ \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right)^n \right\}$$

Lösung. In Polarkoordinaten gilt $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, also folgt

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right)^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

Weil $e^{i\theta} = e^{i\theta + 2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ besteht D aus 8 Punkten, die für $n = 0, 1, 2, ..7$ gefunden werden:

$$D = \{1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{2\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{4\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{6\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$$

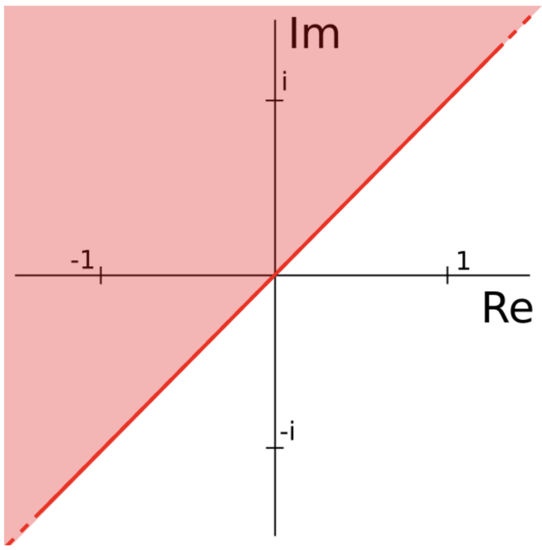


Beispiel 1.5. Zeichnen Sie die folgenden Mengen grafisch in der komplexen Ebene:

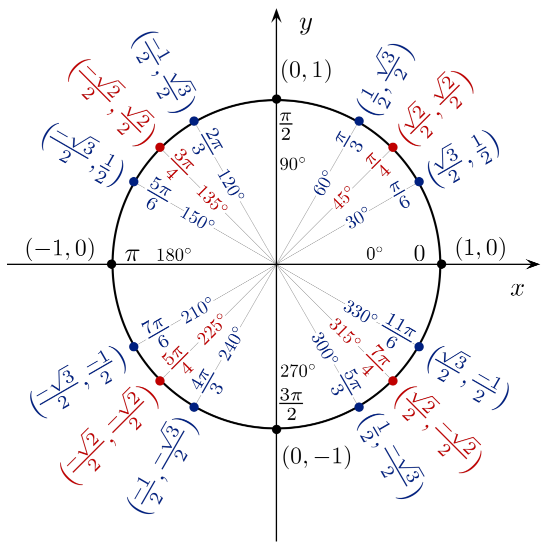
$$E := \{ z \in \mathbb{C} \ \ : \ \ \|z - i\| < \|z - 1\| \}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
&& \|z-i\| &< \|z-1\| \\
&\iff & \|z-i\|^2 &< \|z-1\|^2 \\
&\iff & \|x+iy-i\|^2 &< \|x+iy-1\|^2 \\
&\iff & \|x+i(y-1)\|^2 &< \|(x-1)+iy\|^2 \\
&\overset{z\bar{z}=x^2+y^2}{\iff} & x^2+(y-1)^2 &< (x-1)^2+y^2 \\
&\iff & x^2+y^2-2y+1 &< x^2-2x+1y^2 \\
&\iff & y &> x
\end{aligned}$$



Bemerkung: (sollte auf eure Zusammenfassung für die Prüfung)
Im folgenden sieht ihr "schöne" Cosinus- und Sinuswerte auf dem Einheitskreis, wobei die x-Richtung $\cos(x)$ und die y-Richtung $\sin(x)$ entspricht:



Bemerkung. *Mitternachtsformel* (auswendig)

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.6. Finde alle Lösungen zu der folgenden Gleichung:

$$
z^2 - 2\left(\sqrt{3}i + e^{i\pi}\right) = 0 \tag{1}
$$

Lösung.

$$
\begin{aligned}
& z^2 - 2\left(\sqrt{3}i + e^{i\pi}\right) = 0 \\
\overset{e^{i\pi}=-1}{\iff} \quad & z^2 - 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 0 \\
\iff \quad & z^2 = 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) \\
\iff \quad & z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \\
\iff \quad & z^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\overset{\text{polar Form und Euler Formel}}{\iff} \quad & \left(re^{i\vartheta}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
\iff \quad & r^2 e^{2i\vartheta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \quad & r = \sqrt{4} = 2 \\
\implies \quad & 2\vartheta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
\iff \quad & \vartheta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \quad & z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)} \qquad \text{for} \quad k = 0, 1 \\
\iff \quad & z = \left\{2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} \\
\iff \quad & z = \left\{1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\right\}
\end{aligned}
$$

2 Supremum und Infimum

Theorem 1: Archimedisches Prinzip (Credit: Olivier Bitter)

1. (Version 1): $\forall b > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : b < n$ "Wir können immer grösser werden."
2. (Version 2): $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$ "Wir können immer kleiner werden."

Definition 2.1: obere Schranke

Sie $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst *obere Schranke* für A, falls

$$\forall a \in A : \qquad a \leq b.$$

Definition 2.2: untere Schranke

Eine *untere Schranke* für A ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass folgendes gilt

$$\forall a \in A : \qquad a \geq b.$$

Bemerkung.
Beachte, dass obere oder untere Schranken von A keine Elemente von A sein müssen. Falls die Teilmenge A eine obere Schranke besitzt, so heisst A *nach oben beschränkt.* Falls eine untere Schanke für A existiert, so heisst A *nach unten beschränkt.*

Bemerkung.
Es können mehrere Schranken für eine Menge A existieren, d.h. Schranken sind nicht eindeutig. Ist zum Beispiel b eine obere Schranke für A, so ist es auch jede reelle Zahl, die grösser ist als b.

Definition 2.3: Supremum, Infimum

Das *Supremum* von einer Menge A ist die *kleinste obere Schranke* von A (Notation: $\sup(A)$). Das *Infimum* von A ist die *grösste untere Schranke* von A (Notation: $\inf(A)$). Falls A nach oben und/oder nach unten *unbeschränkt* ist, so setzen wir

$$\sup(A) = +\infty, \qquad \inf(A) = -\infty.$$

Bemerkung.
Während obere und untere Schranken nicht eindeutig sind, sind das Supremum und das Infimum einer Menge A immer eindeutig. Das Supremum und das Infimum müssen keine Elemente von A sein.

Definition 2.4: Maximum, Minimum

Falls $\sup(A) \in A$, so heiss $\sup(A)$ das *Maximum* von A mit folgender Notation:

$$\sup(A) = \max(A).$$

Analog, falls $\inf(A) \in A$, so heisst $\inf(A)$ das *Minimum* von A mit folgender Notation:

$$\inf(A) = \min(A).$$

Definition 2.5

Seien $B, C \subset \mathbb{R}$ nicht leer, dann bezeichnet $B + C$ die folgende Menge

$$B + C := \{b + c \mid b \in B, c \in C\}.$$

Satz 2: Rechnen mit sup/inf

Seien $B, C \subset \mathbb{R}$ nicht leer, dann gelten die folgenden Formeln

(i) $\sup(B + C) = \sup(B) + \sup(C)$

(ii) $\inf(B + C) = \inf(B) + \inf(C)$

(iii) $\sup(B \cup C) = \max\{\sup(B), \sup(C)\}$

(iv) $\inf(B \cup C) = \min\{inf(B), \inf(C)\}$.

Algorithm 1 Supremum Proofs (Credit: Olivier Bitter)

1: Input: A set S
2: **if** $S \neq \emptyset \wedge$ obere Schranke$(S) \neq \emptyset$ **then**
3:     "Errate" s^+ und behaupte, dass "$s^+ \in$ obere Schranke(S)" gilt.
4:     Beweise die Behauptung indem wir zeigen, dass $\forall s \in S : s^+ \geq s$ gilt.
5:     *// Damit wissen wir, dass* $\sup S$ *existiert.*
6:     Jetzt behaupten wir, dass "$s^+ = \sup S$" gilt.
7:     **if** $s^+ \in S$ **then**
8:         *// Proof by demonstration*
9:         $\sup S = \max S = s^+$ und wir sind fertig!
10:     **else**
11:         *// Widerspruchsbeweis*
12:         Zeige, dass $s \notin S$ gilt. *// Damit wissen wir, dass* $\max S$ *nicht existiert.*
13:         Führe ein ϵ-Beweis durch, wie im folgenden Beispiel erklärt. Fertig!
14:     **end if**
15: **else**
16:     S ist entweder leer oder nicht von oben beschränkt, beides impliziert, dass
17:     $\sup S$ und $\max S$ nicht existieren.
18:     Falls S von oben unbeschränkt ist, müssen wir das ebenfalls beweisen!
19: **end if**

Bemerkung. (Credit: Olivier Bitter)
Ein ϵ-Beweis (Zeile 13) wird wie folgt gefhrt:
Sei $\epsilon > 0$ und unsere Widerspruchsannahme ist, dass $s' := s - \epsilon$ eine weitere obere Schranke für S ist. Finde ein Element $s \in S$, so dass es strikt grösser ist als s', was unsere Annahme widerspricht (wir haben angenommen, dass s' eine obere Schranke ist).

Beispiel 2.1 (Credit: Olivier Bitter).
Gegeben: $M_1 := \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$
Gesucht: sup / max and inf / min (falls sie existieren)

Wir starten mit sup / max:

1. (Line 2): Es sollte offensichtlich sein, dass $M_1 \neq \emptyset$. Dass die obere Schranke$(M_1) \neq \emptyset$ sollte ebenfalls klar sein, weil die Elemente abnehme mit wachsendem n. Wir müssen das trotzdem noch formal beweisen (siehe Schritte 2 - 5).

2. (Line 3): Wir erraten $m^+ = 2$ und behaupten, dass $2 \in$ obere Schranke(M_1) ist.

3. (Line 4): $\forall n \geq 1$:

$$n \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2 \geq 1 + \frac{1}{n},$$

   damit haben wir gezeigt, dass $2 \in$ obere Schranke(M_1).

4. (Line 7): Wenn wir $n = 1$ wählen, dann $1 + \frac{1}{1} = 2 = m^+$ und damit haben wir gezeigt, dass $m^+ \in M_1$.

5. (Line 9): Wir fassen unser Resultat nochmals zusammen: $\sup M_1 = \max M_1 = 2$.

Nun berechnen wir inf / min:

1. (Line 2): Es sollte wieder offensichtlich sein, dass $M_1 \neq \emptyset$. Es sollte intuitiv klar sein, dass die Elemente nie negative werden können, damit ist untere Schranke$(S) \neq \emptyset$.

2. (Line 3): Wir erraten $m^- = 1$ und behaupten "$1 \in$ untere Schranke(S)".

3. (Line 4): Um zu sehen, dass 1 eine untere Schranke ist, machen wir die folgende Umformungen: $\forall n \geq 1$:

$$1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq 1.$$

4. (Line 7): Es sieht so aus als ob mit wachsendem n die Elemente sehr nahe an die 1 kommen ohne diese jemals zu erreichen. Deshalb kommen wir auf die Zeile 10 und müssen ein Widerspruchsbeweis führen.

5. (Line 12): Unsere Widerspruchsannahme ist, dass $1 \in M_1$. Aber dann existiert ein $n \geq 1$, so dass folgendes gilt:

$$1 = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 = 1$$

   was ein Widerspruch ist. Daraus folgt, dass M_1 kein Minimum besitzt.

6. (Line 13): Nun möchten wir zeigen, dass 1 die grösste undere Schranke von M_1 ist. Unser Widerspruchsannahme ist, dass es eine grössere untere Schranke existiert mit $m' = m^- + \varepsilon$. Aber in dem Fall müsste folgendes gelten:

$$1 + \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq 1).$$

   Dies steht im Widerspruch zum Theorem 1 (Version 2 vom archimedischem Prinzip). Daraus folgt, dass $\inf M_1 = 1$ und es existiert kein Minimum.