ETH zürich

Analysis I

2. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

March 2, 2020

1 Konvergenz und Divergenz einer Folge

Definition 1.1: Grenzwert einer Folge I

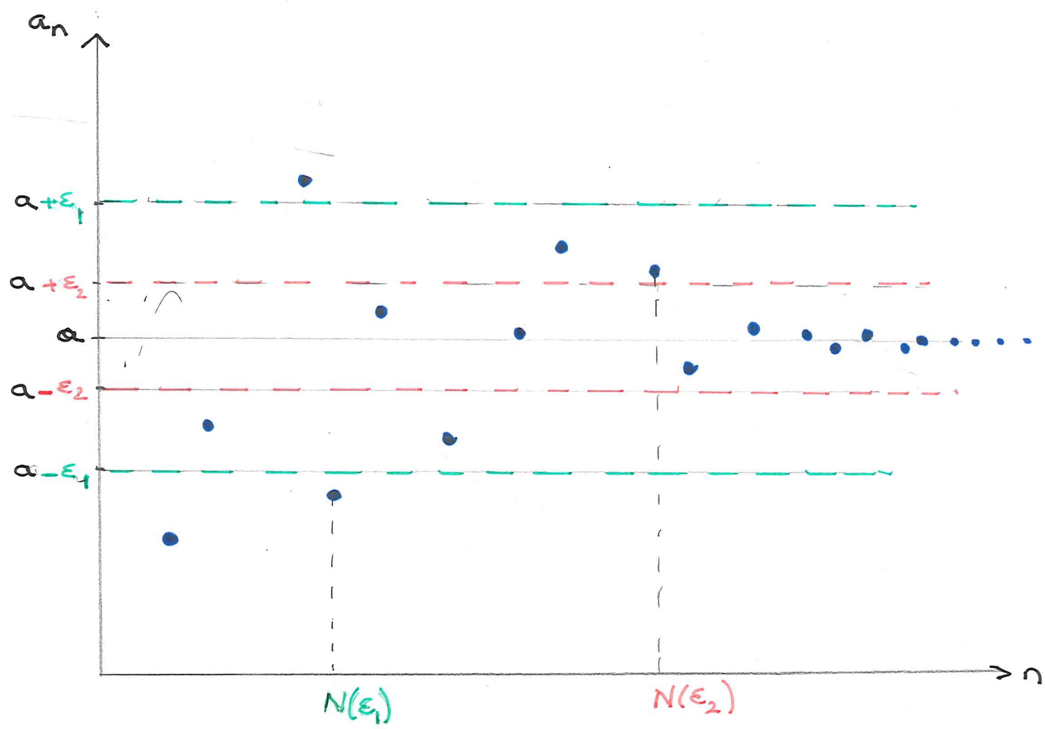
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* mit Grenzwert (Limes) a (konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$), falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definition 1.2: Grenzwert einer Folge II

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizen $n \geq 1$ für die $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ endlich ist.



Definition 1.3

Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie ein Limes besitzt, andernfalls heisst sie *divergent*.

Beispiel 1.1.

(i) $\lim\limits_{n\to\pm\infty} n$
Lösung:
$\lim\limits_{n\to\pm\infty} n = \pm\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$
Lösung:
$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n =$ divergiert

Beispiel 1.2. Zu Zeigen: Beweise mit der Definition, dass das folgende gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis:
Wir wählen ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ (z.B. $\varepsilon = 10^{-5} oder \varepsilon = 10^{-10}$). Gemäss Definition, müssen wir zeigen, dass ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ folgendes gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Wie macht man das? Wir lösen nach n uaf

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n}\right| \overset{!}{<} \varepsilon \quad \overset{n>0}{\Rightarrow} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir wählen demzufolge $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, wobei $\lceil \cdot \rceil$ die Aufrundungsfunktion ist (Gaussklammer) (z.B. $\lceil 123.12 \rceil = 124$). Für $n \geq N$ gilt somit (nach Konsturktion):

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Das entspricht genau der Definition von $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Satz 1

Wenn es ein Limes gibt, so ist dieser eindeutig.

2 Rechnen mit Grenzwerten

Bemerkung. (Dominanzen)
Es gelten die folgende Dominanzen:

(i) Für $x \to \infty:$ $1 \leq log(x) \leq \sqrt{x} \leq x^n$ (für $n > 0$) $\leq n^x$ (für $n > 1$) $\leq x! \leq x^x$

(ii) Für $x \to 0:$ $log(x) \leq x^n \leq \frac{1}{x^n}$

Satz 2: Rechenregeln für Grenzwerte

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwerten a bzw. b, dann folgt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(iii) Falls $b_n,\ b \neq 0$, so gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

(iv) Falls $a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt: $a \leq b$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a), \quad \forall f$ stetig.

Beispiel 2.1. Untersuche das Konvergenzverhalten von

$$a_n = \frac{(\frac{1}{n} + n^2)^{995}}{1 + n^{1990}}.$$

Lösung:
Da der Nenner und der Zähler nicht konvergieren, ist die dritte Regel (iii) nicht direkt anwendbar. Wir müssen die Terme wie folgt umformen, um das Problem zu umgehen.

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{n} + n^2)^{995}}{1 + n^{1990}} &= \frac{(n^2(\frac{1}{n^3} + 1))^{995}}{1 + n^{1990}} \\ &= \frac{n^{1990}(\frac{1}{n^3} + 1)^{995}}{n^{1990}(\frac{1}{n^{1990}} + 1)} \\ &= \frac{(\frac{1}{n^3} + 1)^{995}}{\frac{1}{n^{1990}} + 1} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\frac{1}{n^{1990}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n^3} + 1)^{995}}{\frac{1}{n^{1990}} + 1} = \frac{(0+1)^{995}}{0+1} = \frac{1^{995}}{1} = 1.$$

Satz 3: Sandwich-Theorem

Es seien die drei Folgen $a_n \leq b_n \leq c_n$ gegeben. Falls a_n und c_n konvergieren mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ mit $L \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch b_n und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Beispiel 2.2. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n}$.

Lösung:
Für $n \geq 1$ gilt $2n \geq 1$, somit erhalten wir:

$$\frac{2n}{2^n} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Für $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$, somit erhalten wir:

$$\frac{2n}{2^n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Damit erhalten wir für $n \geq 4$ also die folgenden Abschätzungen:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{2n}{2^n} \leq \frac{2}{n}$$

Die rechte und linke Seite konvergieren gegen 0:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \overset{\text{Sandwich-Thm}}{\Longrightarrow} \quad &\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n} = 0. \end{aligned}$$

3 Monotonie und Konvergenz

Definition 3.1

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *monoton steigend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

Definition 3.2

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *streng monoton steigend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} > a_n.$$

Definition 3.3

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Definition 3.4

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *streng monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} < a_n.$$

Bemerkung.
Um die Monotonie zu zeigen, kann man wie folgt vorgehen: Ersetzte n durch die kontinuierliche Variable x und berechne die Ableitung nach x. Gilt $a'(x) \geq 0$ respektive $a'(x) \leq 0$, so ist die Folge monoton wachsend respektive monoton fallend.

Bemerkung.
Eine andere Variante ist, man zeigt direkt $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ oder $a_{n+1} - a_n > 0$, analog für die anderen Fälle.

Definition 3.5: (3.3.1.)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst nach oben (unten) beschränkt, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq b \qquad (\text{bzw. } b \leq a_n);$$

das heisst, falls die Menge $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.

Satz 4: (3.3.1.)

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Bemerkung.
Beschränktheit ist also notwendig, jedoch nicht hinreichend für Konvergenz, wie das Beispiel der Folge $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$, zeigt.

$$\begin{aligned} & a_n \text{konvergent} \Rightarrow a_n \text{beschränkt} \\ \text{ABER:}\quad & a_n \text{konvergent} \not\Leftarrow a_n \text{beschränkt} \end{aligned}$$

Satz 5: Satz über monotone Konvergenz (3.3.2.)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben *beschränkt* und *monoton wachsend*, das heisst, mit einer Zahl, $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_1 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ... \leq b.$$

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = b.$
Analog, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten *beschränkt* und *monoton fallend*.

Bemerkung.
Die Merkregel ist:
Beschränkheit + Monotonie = Konvergenz.

Beispiel 3.1. Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1$$

Zeige, dass die Folge a_n konvergiert. Was ist der Grenzwert?

Lösung:
Wir berechnen einige Terme, um ein Gefühl zu bekommen wie sich die Folge verhält

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4} = 1.25, \quad a_3 = \frac{89}{64} = 1.39, \quad ...$$

Die Zahlen suggerieren, dass die Folge monoton wachsend ist.

Monotonie:
Anstatt $a_{n+1} \geq a_n$ direkt zu zeigen, zeigen wir die dazu äquivalente Aussage $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n^2}{4} + 1 - a_n \\ &= \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{4} \\ &= \frac{(a_n - 2)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

Beschränkheit:
Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. (Angenommen es existiert ein Grenzwert, dann könnt ihr mit dem letzten Schritt den berechnen, aber dann müsst ihr immer noch die Beschränkheit zeigen.)
Induktionsverankerung $(n = 0)$:

$$a_0 = 0 \leq 2 \quad \checkmark$$

Induktoinsschritt $(n \mapsto n+1)$:
Wir nehmen an, dass $a_n \leq 2$ für ein fixes aber beliebtes $n \in \mathbb{N}$ gilt (Induktionsannahme, IA). Es folgt

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1 \overset{\text{IA}}{\leq} \frac{2^2}{4} + 1 = 2.$$

Nun können wir den Satz über monotone Konvergenz anwenden. Daraus folgt, dass a_n konvergiert, d.h. es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Jetzt berechnen wir den Grenzwert a.

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \overset{\substack{a_{n+1} \to a \\ a_n \to a}}{\Longrightarrow} \quad a &= \frac{a^2}{4} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2. \end{aligned}$$