ETH zürich

Analysis I

# 3. Übungsstunde

*Steven Battilana*
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

March 8, 2020

# 1 Nützliches: Fundamentallimes

(i) $\lim\limits_{n\to\pm\infty}(1 \pm \frac{x}{n})^n = e^{\pm x}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty \,\wedge\, f(n)\to\infty}(1 + \frac{1}{f(n)})^{f(n)} = e$

(iii) $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$

(iv) $\lim\limits_{n\to 0}(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}} = e$

**Beispiel 1.1.** Löse $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{\pi}{x})^{2x}$.

*Lösung:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(1-\frac{\pi}{x})^{2x} &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{\pi}}\right)^{-\frac{x}{\pi}}\right]^{-\frac{\pi}{x}\cdot 2x} \\
&= e^{-\frac{\pi}{x}\cdot 2x} \\
&= e^{-2\pi}
\end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.** Löse $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

*Lösung:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \lim_{x\to 0}\log\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(\left(\frac{1+x+x-x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(\left(\frac{1-x+x+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(\left(\frac{1-x}{1-x}+\frac{x+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(e^{\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\log\left(e^{\frac{2}{1-x}}\right) \\
&= \log\left(e^{\frac{2}{1-0}}\right) \\
&= \log\left(e^{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

# 2 Cauchy Kriterium

**Definition 2.1: Cauchy Folge**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Cauchy Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

**Satz 1: Cauchy Kriterium (3.5.1)**

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $(a_n)$ ist konvergent

(ii) $(a_n)$ ist eine Cauchy-Folge.

**Beispiel 2.1.** Ist die Folge $\frac{n-1}{2n}$ konvergent?

*Lösung:*
Wir wählen ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$. Wir suchen $N$, so dass für alle $m, n > N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$. O.B.d.A (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $m \geq n$ (oder $n \geq m$) zu fixieren.

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left|\frac{n-1}{2n} - \frac{m-1}{2m}\right| \\
&= \left|\frac{m(n-1) - n(m-1)}{2nm}\right| \\
&= \left|\frac{nm - m - nm + n}{2nm}\right| \\
&= \left|\frac{n-m}{2nm}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}\right| \\
&\overset{m\geq n}{\leq} \left|\frac{1}{2n}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2n}\right| \\
&\overset{!}{<} \varepsilon. \\
&\Leftrightarrow \qquad n > \frac{1}{2\varepsilon} \\
&\Rightarrow \qquad N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil
\end{aligned}$$

Die Folge $a_n$ ist deshalb eine Cauchy-Folge und da alle Cuahy-Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren, ist auch unsere Reihe konvergent.

# 3 Teilfolgen, Häufungspunkte

**Definition 3.1**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $\ell : \mathbb{N} \to \Lambda \subset \mathbb{N}, n \mapsto \ell(n)$, eine strikt monotone wachsende Folge von natürlichen Zahlen. Die Verkettung $(a_{\ell(n)})$ von $\ell(n)$ und $a_n$ heisst eine Teilfolge von $a_n$.

**Bemerkung.**
Dabei ist es wichtig, dass $\Lambda$ unendlich viele Elemente enthält. Wenn $\Lambda$ endlich wäre, würde man gar keine Teilfolge bekommen sondern einfach eine Liste von endlich vielen Zahlen!

**Beispiel 3.1.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es unter anderem die folgenden zwei Folgen:

$$\begin{aligned} \{1, 1, 1, ...\} \qquad & (\Lambda = 2\mathbb{N} = \{\text{gerade Zahlen}\}) \\ \{-1, -1, -1, ...\} \qquad & (\Lambda = 2\mathbb{N} + 1 = \{\text{ungerade Zahlen}\}) \end{aligned}$$

**Definition 3.2**

$a \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a$ konvergierende Teilfolge $(a_{\ell(n)})$ besitzt. D.h. es gibt eine Teilfolge $(a_{\ell(n)})$ mit

$$\lim_{\ell(n)\to\infty} a_{\ell(n)} = a.$$

**Satz 2: Bolzano-Weierstrass (3.4.1)**

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

**Bemerkung.**

$$\begin{aligned} a_n \text{ beschränkt} \quad & \not\Rightarrow \quad a_n \text{ konvergiert} \\ a_n \text{ beschränkt} \quad & \overset{\text{Bolzano-Weierstrass}}{\Longrightarrow} \quad \exists \text{ Teilfolge } \ (a_{\ell(n)}) \text{ die konvergiert.} \end{aligned}$$

# 4 Limes superior und Limes inferior

**Definition 4.1: Limes superior und Limes inferior**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h.

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| < M.$$

Fuř $k \in \mathbb{N}$ existieren dann gemäss Satz von Sup und Inf

$$c_k = \inf_{n\geq k} a_n \leq \sup_{n\geq k} a_n = b_k$$

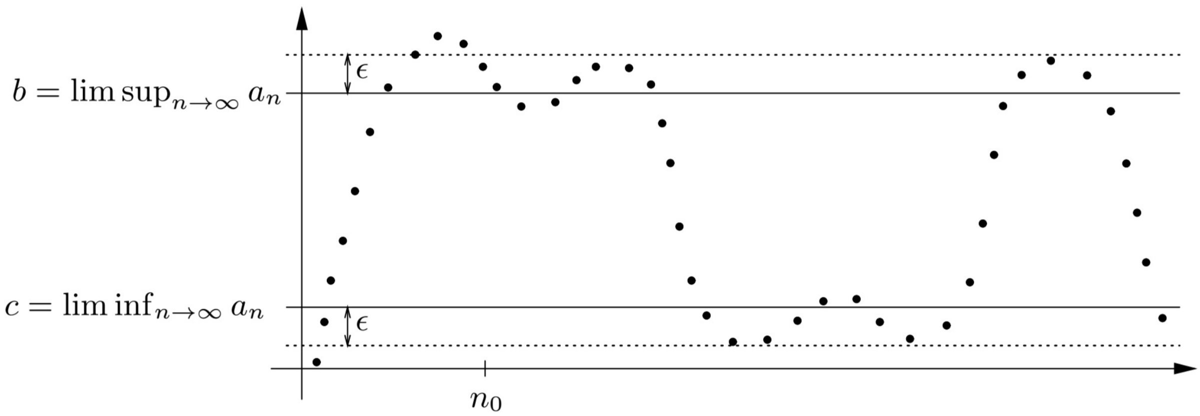
Damit gilt

$$-M \leq c_1 \leq ... \leq c_k \leq c_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \leq ... \leq b_1 \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Mit dem Satz für monotone Konvergenz folgt die Existenz von

$$\text{"Limes superior"}: \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} b_k = b$$
$$\text{"Limes inferior"}: \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} c_k = c$$

und es gilt $c \leq b$ wegen dem Satz mit den Rechenregeln mit Grenzwerten (Regel (iv)).




**Satz 3**

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**Bemerkung.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Sei $a_+ := \limsup a_n$, $a_- := \liminf a_n$ ($a_+, a_-$ sind Häufungspunkte.)
Dann gilt:

(i) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $a_n \notin (a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon)$.

(ii) $a_+$ ist der grösste Häufungspunkt und $a_-$ ist der kleinste Häufungspunkt.

(iii) Weiter gilt: Falls $a_+ = a_-$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_+ = a_- \; (= a).$$

(iv) Umgekehrt konvergiert jede Teilfolge einer Folge $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ ebenfalls gegen $a$, und es gilt $a = a_+ = a_-$.

**Beispiel 4.1.** Berechne $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ der Folge:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \cdot \frac{n+5}{n} \\ &= \begin{cases} (-1) \cdot \frac{n+5}{n}, & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n+5}{n}, & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

*Lösung:*
Wir definieren $b_k := (-1) \cdot \frac{k+5}{k}$ und $c_k := \frac{k+5}{k}$

- $$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{k\to\infty} b_k = -1 \\ \liminf_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \frac{n+5}{n} &= \lim_{k\to\infty} (-1) \cdot \frac{k+5}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} -\frac{k+5}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} -\frac{k(1+\frac{5}{k})}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} -\frac{1+\frac{5}{k}}{1} \\ &= \lim_{k\to\infty} -1-\frac{5}{k} \\ &= -1-0 \\ &= -1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{k\to\infty} c_k = 1 \\ \limsup_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+5}{n} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+5}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k(1+\frac{5}{k})}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{5}{k}}{1} \\ &= 1+0 \\ &= 1\end{aligned}$$