ETH zürich

Analysis I

6. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

March 28, 2020

1 Ohne Kategorie

Partialbruchzerlegung (”light”, mittels Beispiel erläutert)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+2)(x-1)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(A+B)x+(2B-A)\cdot 1}{(x+2)(x-1)}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}1 &\overset{!}{=} (A+B)x + (2B-A)\cdot 1 \\ &\Rightarrow A+B=0 \quad \wedge \quad 2B-A=1 \\ &\Leftrightarrow A=-B \qquad (*) \\ &\Rightarrow 2B-A=1 \\ &\overset{A=-B}{\Longrightarrow} 2B-(-B)=1 \\ &\Leftrightarrow 3B=1 \\ &\Leftrightarrow B=\frac{1}{3} \\ &\overset{(*)\,\wedge\, B=\frac{1}{3}}{\Longrightarrow} A=-\frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x+1)}\end{aligned}$$

Bemerke, wir haben einen Bruch nun in zwei Brüche aufgeteilt.

2 Potenzreihen (Erinnerung)

Definition 2.1

Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

worin x eine reelle (oder komplexe) Variabe ist und $(a_n)_{n\mathbb{N}}$ eine reelle (oder komplexe) Folge ist.
Manchmal git man den allgemeineren Begriff einer Potzenzreihe mit einem Entwicklungspunkt x_0 an

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Definition 2.2

Der *Konvergenzradius* ist als das Supremum aller Zahlen $\rho \geq 0$ definiert, für welche die Potenzreihe für alls x mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert:

$$\rho := \left\{ |x - x_0| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

Satz 1: Konvergenzradius

Für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gelten die folgenden Formeln:

$$\text{(i)}\;\; \rho = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{(bei !, } x^n, \text{ ...)}$$

$$\text{(ii)}\;\; \rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(bei } (\cdot)^n, x^n, !, \ldots).$$

Beweis von (i):

Wir wenden das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Wir erhalten absolute Konvergenz, falls

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \\
&= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \overset{!}{<} 1. \\
\Leftrightarrow \qquad |x| &< \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =: \rho.
\end{aligned}$$

□

Beweis von (ii):

Wir wenden das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Wir erhalten absolute Konvergenz, falls

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|x^n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \\
&= |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{!}{<} 1. \\
\Leftrightarrow \quad |x| &< \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =: \rho.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung.
Beide Formeln folgen unmittelbar aus dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium für (i) bzw. (ii).

Bemerkung.
Aus (i) und (ii) folgt wie beim Quotienten- und Wurzelkriterium die absolute Konvergenz.

Bemerkung. (Wichtig)
Am Rand des Konvergenzkreises, d.h. für den Fall $|x - x_0| = \rho$ ist keine Aussage über die Konvergenz möglich. Deshalb muss man diesen Fall einzeln betrachten.

Beispiel 2.1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n (x+1)^n$$

Lösung:

Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe von der Formel (ii):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\rho} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{>0} \left(\underbrace{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}_{\geq 0} \right)^n \right|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right)^n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n}} + |n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&\overset{n\geq 0}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{1^2} \frac{1-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\widetilde{\rho}} = 2$$

Also konvergiert die Potenzreihe für $|x+1| < 2$ $(*)$ und divergiert für $|x+1| > 2$. Nun berechnen wir den Konvergenzbereich in Abhängigkeit von x für $(*)$:

-
$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{\Rightarrow} && -(x+1) = 2\\
&\Leftrightarrow && -x-1 = 2\\
&\Leftrightarrow && -x = 3\\
&\Leftrightarrow && x = -3
\end{aligned}
$$

-
$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{\Rightarrow} && x+1 = 2\\
&\Leftrightarrow && x = 1
\end{aligned}
$$

-
$$\Longrightarrow \quad |x+1| < 2 \Leftrightarrow x \in (-3,1)$$

Jetzt müssen wir nur noch den Fall $|x+1| = 2$ abdecken:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)^n (\pm 2)^n &=^{\text{Herleitung analog wie oben ausgeführt}}_{\ldots}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)^n (\pm 2)^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{(\pm 2)(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)^n\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir eine konvergente Majorante. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$ und $x = -3$.
Zusammenfassend: Die Potenzreihe konvergiert absolut für $x \in [-3,1]$ und divergiert sonst.

Beispiel 2.2. Bestimme den Konvergenzbereich von: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x^2-1)^n$.

Lösung:
Wir betrachten zuerst $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^n$ $(*)$ mit $y := (x^2-1)$. Nun bestimmen wir den Konver-

genzradius mit Hilfe von der Formel (i):

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)+1}{1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| \\
&\overset{n\geq 0}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die Potenzreihe $(*)$ konvergiert somit absolut für $|y| < 1$ und divergiert für $|y| > 1$. Nun betrachten wir den Fall $y = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}1^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \qquad (**)$$

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$

(ii) $\frac{1}{n+1} \geq 0$

(iii)

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n - a_{n+1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \text{damit ist } a_n \text{ monoton fallend}
\end{aligned}$$

$\overset{\text{Leibnitz-Kriterium}}{\Longrightarrow}$ $(**)$ konvergiert.

Jetzt betrachten wir den Fall $y = -1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Wir haben die harmonische Reihe erhalten und wissen deshalb, dass die Reihe in diesem Fall divergiert. Damit konvergiert $(*)$ für $y \in (-1, 1]$. Jetzt zum Schluss müssen wir $y = x^2 - 1$ rücksubstituiren und bekommen:

$$\begin{aligned}-1 < y \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 - 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 \leq 2 \\ &\Longrightarrow \quad B = [-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}].\end{aligned}$$

3 Potenzreihendarstellung

Definition 3.1

Die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion haben die folgende Potenzreihendarstellung:

(i) $\text{Exp}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(ii) $\text{Sin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iii) $\text{Cos}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Beispiel 3.1. Berechne mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von Exp den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Exp}(x) - 1}{x}$.

Lösung:

$$\frac{\text{Exp}(x) - 1}{x} = \underbrace{\frac{\text{Exp}(x)}{x}}_{(i)} - \frac{1}{x} \tag{1}$$

Wir betrachten nun (i):

$$\begin{aligned}\frac{\text{Exp}(x)}{x} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} &(2)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} &(3)\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir, ob (3) konvergiert und wenn ja für welche x. Wir wenden deshalb nun das Quotientenkriterium an:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)-1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^{n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!(n+1)}\frac{n!}{x^{n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} \\
&= 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{die Reihe konvergiert absolut.}
\end{aligned}$$

Nun können wir endlich (1) berechnen, dazu schreiben wir die ersten paar Terme der Potenzreihendarstellung von Exp aus.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Exp}(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Exp}(x)}{x} - \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\mathrm{Exp}(x)}{x}}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\frac{1}{x}+1+O(x)} - \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+1+O(x)-\frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} 1 + \underbrace{O(x)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4 Stetigkeit

Definition 4.1: (4.1.2)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n,\ x_0 \in \overline{\Omega},\ a \in \mathbb{R}^n$.
f hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ gilt $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} a$.
Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = a$.

Bemerkung.
Die Definition von Gernzwert mit Folgen von oben kann alternativ wie folgt geschrieben werden:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \text{gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Definition 4.2: (4.1.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

(i) f heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) =: a$ existiert.

(ii) f heisst *an der Stelle* $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ *stetig ergänzbar*, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =: a$ existert. (In diesem Fall ist die duch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f stegig an der Stelle x_0.)

Definition 4.3: (4.2.1)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.
f heisst *stetig auf* Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Bemerkung.
Um eine gegebene Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle x_0 zu überprüfen, muss man also folgende drei Punkte nachweisen:

(i) f muss auf Ω definiert sein

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Satz 2: (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind

(i) $f + g$

(ii) $f - g$

(iii) fg

(iv) $\frac{f}{g}$ falls $g \neq 0$

stetig.
Ausserdem sind $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist es auch $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$

Beweis von (i): Diese Aussage folgt direkt aus der Summenregel für Limites. Sei $a \in \Omega$. Da f und g an der Stelle a stetig sind, gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Mit der Regel "Limes der Summe gleich Summe der Limites" folgt

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Somit ist $f + g$ an der Stelle a stetig. □
(*Bemerkung.* Für die anderen Regeln ist der Beweis analog.)

Bemerkung.
Die Exponentialfunktion, der Sinus, der Cosinus, der Tangents (zwischen den Nullstellen vom Cosinus), die hyperbolischen Funktionen und der Logarithmus sind alles stetige Funktionen.

Bemerkung. (Wichtig)
Die Komposition stetiger Abbildungen ist auch stetig. Ausgeschlossen sind natürlich *Problemstellen*, z.B. der Nenner verschwindet oder es gibt Änderungen in der Definition von der Funktion.

Beispiel 4.1. Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{x-3}, & \text{für } \ x \geq -2 \end{cases}$$

Lösung:
Die Funktion $f(x)$ ist links von -2 eine Komposition aus stetigen Funktionen und ist somit auch stetig. Die Funktion $f(x)$ ist rechts von -2 eine Komposition aus rechtsseitig stetigen Funktionen und ist somit, ausgenommen im Punkt $x = 3$, rechtsseitig stetig.

(i) $\lim\limits_{x \to (-2)^-} x^2 - 2 = 2$

(ii) $f(-2) = -\frac{1}{5}$

$\overset{(i)\&(ii)}{\Longrightarrow} \quad 2 \neq -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist nicht stetig an der Stelle -2.

Beispiel 4.2. Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{für } \ x > 1 \end{cases}$$

Lösung:
Die Funktion $f(x)$ ist links von 1 eine Komposition aus linksseitig stetigen Funktionen und ist somit auch linksseitig stetig. Die Funktion $f(x)$ ist rechts von 1 eine Komposition aus stetigen Funktionen und ist somit auch stetig.

(i) $f(1) = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 4x + 4 = 1$

$\overset{(i)\&(ii)}{\Longrightarrow} \quad (i) = (ii) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist stetig an der Stelle 1.

Beispiel 4.3. Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & \text{für } x < 2 \\ a^2(x + 2) & \text{für } \ x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimme $a \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ in $x = 2$ stetig ist.

Lösung: Die Funktionen $x \mapsto 8a + 16x$ und $x \mapsto a^2(x + 2)$ sind stetig. Deshalb ist die Funktion f stetig ausserhalb des Punktes 2 und sie ist rechtsseitig stetig im Punkt 2.

Damit sie an der Stelle 2 noch stetig ist, muss zusätzlich folgendes gelten:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &\overset{!}{=} f(2) \\
\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} 8a + 16x &= a^2 \cdot 4 \\
\Leftrightarrow \quad 8a + 32 &= a^2 \cdot 4 \\
\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 8a - 32 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad a_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot (-32)}}{2 \cdot 4} \\
&= \frac{8 \pm \sqrt{576}}{8} \\
&= \frac{8 \pm 24}{8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass f für $a = -2$ und $a = 4$ an der Stelle $x = 2$ stetig ist.

Satz 3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beispiel 4.4. Zeige: Das Polynom $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ besitzt eine Nullstelle, welche zwischen 1 und 2 liegt.

Lösung:

- *Stetigkeit*: f ist auf $[1, 2]$ stetig, weil Polynome Kompositionen aus stetigen Funktion sind.
- Wir werten f am Rand also an den Stellen $x = 1$ und $x = 2$ aus:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \\
f(2) &= 32 - 24 + 6 - 2 > 0
\end{aligned}
$$

  Gemäss dem Zwischenwertsatz muss als f alle Werte zwischen $f(1)$ (negativ) und $f(2)$ (positiv) im Intervall $[1, 2]$ annehmen. Insbesondere gibt es ein $x^* \in (1, 2)$, mit $f(x^*) = 0$. Damit ist x^* die gesuchte Nullstelle des Polynoms.

Beispiel 4.5. Besitzt die Gleichung $\sin(2x) - e^x = -5$ eine Lösung im Intervall $[0, \pi]$?

Lösung:
Wir definierten die Funktion $f(x) = \sin(2x) - e^x + 5$.

$$\sin(2x) - e^x = -5 \text{ besitzt eine Lösung in } [0, \pi] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

- *Stetigkeit*: Da der Sinus und die Exponentialfunktion stetig sind, ist f eine stetige Funktion.

- Wir werten f am Rand also an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ aus:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) - e^0 + 5 = 4 \geq 0 \\ f(\pi) &= \sin(2\pi) - e^\pi + 5 \\ &= -e^\pi + 5 \leq 0 \end{aligned}$$

  Gemäss dem Zwischenwertsatz gitbt es also ein $x^* \in [0, \pi]$, so dass $f(x^*) = 0$. Damit ist x^* die gesuchte Lösung der Gleichung im Intervall $[0, \pi]$.