ETH zürich

Analysis I

7. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

April 4, 2020

1 Injektiviät , Surjektivität, Bijektivität

Definition 1.1

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *injektiv*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition 1.2

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *surjektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition 1.3

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst *bijektiv*, falls

$$\forall y \in Y \, \exists! x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f *genau eins* "getroffen".)

Beispiel 1.1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so dass $g \circ f : X \to Z$ *bijektiv* ist. Beweise die folgenden Aussagen, oder widerlege mit einem Gegenbeispiel.

(a) f ist injektiv

(b) f ist surjektiv

(c) g ist injektiv

(d) g ist surjektiv

Lösung:

(a) f ist injektiv. Seien $x, x' \in X$ verschieden. Nehme an, dass $f(x) = f(x')$. Dann folgt auch
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$
Da $g \circ f$ injektiv ist [folgt weil $g \circ f$ bijektiv ist], folgt $x = x'$, im Widerspruch zur Annahme, dass die beiden Elemente verschieden sind. Also gilt $f(x) \neq f(x')$.

(b) f ist im Allgemeinen nicht surjektiv. Gegenbeispiel:
Sei $X = \{x\}, Y = \{x, x'\}$, mit $x \neq x'$, und $Z = X$. Setze $f(x) = x$ und $g(x) = g(x') = x$. Dann ist $g \circ f$ die Identität auf X und somit bijektiv [wie in der Aufgabenstellung gegeben]. Die Funktion f ist nun allerdings nicht surjektiv, da x' nicht im Bild con f liegt.

(c) g ist im Allgemeinen nicht injektiv. Als Gegenbeispiel nehme man dasjenige aus Aufgabenteil (b). Dort ist g nicht injektiv, da x und x' beide auf x abgebildet werden.

(d) g ist surjektiv. Da $g \circ f$ surjektiv ist [folgt weil $g \circ f$ bijektiv ist], gilt $Z = (g \circ f)(X)$. Aber

$$Z = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z.$$

Also $g(Y) = Z$, und g ist surjektiv.

2 Potenzreihendarstellung (Erinnerung)

Definition 2.1

Die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion haben die folgende Potenzreihendarstellung:

(i) $\operatorname{Exp}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(ii) $\operatorname{Sin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iii) $\operatorname{Cos}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Beispiel 2.1. Berechne mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von Exp den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Exp}(x)-1}{x}$.

Lösung:

$$\frac{\operatorname{Exp}(x) - 1}{x} = \underbrace{\frac{\operatorname{Exp}(x)}{x}}_{(i)} - \frac{1}{x} \tag{1}$$

Wir betrachten nun (i):

$$\frac{\operatorname{Exp}(x)}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \tag{3}$$

Jetzt müssen wir, ob (3) konvergiert und wenn ja für welche x. Wir wenden deshalb nun das Quotientenkriterium an:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)-1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^{n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!(n+1)}\frac{n!}{x^{n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} \\
&= 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{die Reihe konvergiert absolut.}
\end{aligned}
$$

Nun können wir endlich (1) berechnen, dazu schreiben wir die ersten paar Terme der Potenzreihendarstellung von Exp aus.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Exp}(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Exp}(x)}{x} - \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\mathrm{Exp}(x)}{x}}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\frac{1}{x}+1+O(x)} - \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} + 1 + O(x) - \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} 1 + \underbrace{O(x)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Satz 1: Leibniz Satz 2.7.12 (Burger Skript)

Sei $(a_n)_{n\leq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1.$$

3 Stetigkeit

Definition 3.1: 3.2.1 (Burger Skript)

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in x_0 stetig***, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Definition 3.2: 3.2.1 (Quantorenversion von oben)

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in x_0 stetig***, falls

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$

gilt.

Definition 3.3: (4.1.2)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n,\ x_0 \in \overline{\Omega},\ a \in \mathbb{R}^n$.
f hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ gilt $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} a$.
Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = a$.

Bemerkung.
Die Definition von Gernzwert mit Folgen von oben kann alternativ wie folgt geschrieben werden:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Definition 3.4: (4.1.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

(i) f heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) =: a$ existiert.

(ii) f heisst *an der Stelle* $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ *stetig ergänzbar*, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =: a$ existert. (In diesem Fall ist die duch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f stegig an der Stelle x_0.)

Definition 3.5: (4.2.1)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.
f heisst *stetig auf* Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Bemerkung.
Um eine gegebene Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle x_0 zu überprüfen, muss man also folgende drei Punkte nachweisen:

(i) f muss auf Ω definiert sein

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert, d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Satz 2: (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind

(i) $f + g$

(ii) $f - g$

(iii) fg

(iv) $\frac{f}{g}$ falls $g \neq 0$

stetig.
Ausserdem sind $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist es auch $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$

Beweis von (i): Diese Aussage folgt direkt aus der Summenregel für Limites. Sei $a \in \Omega$. Da f und g an der Stelle a stetig sind, gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Mit der Regel "Limes der Summe gleich Summe der Limites" folgt

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Somit ist $f + g$ an der Stelle a stetig. □
(*Bemerkung.* Für die anderen Regeln ist der Beweis analog.)

Bemerkung.
Die Exponentialfunktion, der Sinus, der Cosinus, der Tangents (zwischen den Nullstellen vom Cosinus), die hyperbolischen Funktionen und der Logarithmus sind alles stetige Funktionen.

Bemerkung. (Wichtig)
Die Komposition stetiger Abbildungen ist auch stetig. Ausgeschlossen sind natürlich *Problemstellen*, z.B. der Nenner verschwindet oder es gibt Änderungen in der Definition von der Funktion.

Beispiel 3.1. Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{x-3}, & \text{für } \ x \geq -2 \end{cases}$$

Lösung:
Die Funktion $f(x)$ ist links von -2 eine Komposition aus stetigen Funktionen und ist somit auch stetig. Die Funktion $f(x)$ ist rechts von -2 eine Komposition aus rechtsseitig stetigen Funktionen und ist somit, ausgenommen im Punkt $x = 3$, rechtsseitig stetig.

(i) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2 - 2 = 2$

(ii) $f(-2) = -\frac{1}{5}$

$\overset{(i)\&(ii)}{\Longrightarrow} \quad 2 \neq -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist nicht stetig an der Stelle -2.

Beispiel 3.2. Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{für } \ x > 1 \end{cases}$$

Lösung:
Die Funktion $f(x)$ ist links von 1 eine Komposition aus linksseitig stetigen Funktionen und ist somit auch linksseitig stetig. Die Funktion $f(x)$ ist rechts von 1 eine Komposition aus stetigen Funktionen und ist somit auch stetig.

(i) $f(1) = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 4x + 4 = 1$

$\overset{(i)\&(ii)}{\Longrightarrow} \quad (i) = (ii) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist stetig an der Stelle 1.

Beispiel 3.3. Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & \text{für } x < 2 \\ a^2(x+2) & \text{für } \ x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimme $a \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ in $x = 2$ stetig ist.

Lösung: Die Funktionen $x \mapsto 8a + 16x$ und $x \mapsto a^2(x+2)$ sind stetig. Deshalb ist die Funktion f stetig ausserhalb des Punktes 2 und sie ist rechtsseitig stetig im Punkt 2. Damit sie an der Stelle 2 noch stetig ist, muss zusätzlich folgendes gelten:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \overset{!}{=} f(2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 2^-} 8a + 16x = a^2 \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \quad 8a + 32 = a^2 \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 8a - 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot (-32)}}{2 \cdot 4}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{576}}{8}$$
$$= \frac{8 \pm 24}{8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass f für $a = -2$ und $a = 4$ an der Stelle $x = 2$ stetig ist.

Satz 3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beispiel 3.4. Zeige: Das Polynom $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ besitzt eine Nullstelle, welche zwischen 1 und 2 liegt.

Lösung:

- *Stetigkeit*: f ist auf $[1,2]$ stetig, weil Polynome Kompositionen aus stetigen Funktion sind.
- Wir werten f am Rand also an den Stellen $x = 1$ und $x = 2$ aus:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \\ f(2) &= 32 - 24 + 6 - 2 > 0 \end{aligned}$$

  Gemäss dem Zwischenwertsatz muss als f alle Werte zwischen $f(1)$ (negativ) und $f(2)$ (positiv) im Intervall $[1,2]$ annehmen. Insbesondere gibt es ein $x^* \in (1,2)$, mit $f(x^*) = 0$. Damit ist x^* die gesuchte Nullstelle des Polynoms.

Beispiel 3.5. Besitzt die Gleichung $\sin(2x) - e^x = -5$ eine Lösung im Intervall $[0,\pi]$?

Lösung:
Wir definierten die Funktion $f(x) = \sin(2x) - e^x + 5$.

$$\sin(2x) - e^x = -5 \text{ besitzt eine Lösung in } [0,\pi] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

- *Stetigkeit*: Da der Sinus und die Exponentialfunktion stetig sind, ist f eine stetige Funktion.
- Wir werten f am Rand also an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ aus:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) - e^0 + 5 = 4 \geq 0 \\ f(\pi) &= \sin(2\pi) - e^\pi + 5 \\ &= -e^\pi + 5 \leq 0 \end{aligned}$$

  Gemäss dem Zwischenwertsatz gitbt es also ein $x^* \in [0,\pi]$, so dass $f(x^*) = 0$. Damit ist x^* die gesuchte Lösung der Gleichung im Intervall $[0,\pi]$.