ETH zürich

Analysis I

8. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

April 19, 2020

1 Stetigkeit (II)

Definition 1.1: (Struwe 4.2.2)

$K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt, d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty,\, n\in\Lambda} x_0.$$

Bemerkung.
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiel 1.1 (Struwe 4.2.2)**.**

(i) Das "abgeschlossene" Intervall $[0,1]$ ist kompakt.

(ii) Das "offene" Intervall $(0,1)$ ist *nicht* kompakt.

Die Beweise sind im Struwe Skript.

1.1 Stetigkeit

Definition 1.2: (Struwe 4.1.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

(i) f heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) =: a$ existiert.

(ii) f heisst *an der Stelle* $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ *stetig ergänzbar*, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =: a$ existert. (In diesem Fall ist die duch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f stegig an der Stelle x_0.)

Definition 1.3: (Struwe 4.2.1)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.
f heisst *stetig auf* Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Definition 1.4: (Burger 3.2.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in $\boldsymbol{x_0}$ stetig***, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Definition 1.5: (Burger 3.2.1 (Quantorenversion von oben))

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in $\boldsymbol{x_0}$ stetig***, falls

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$

gilt.

1.2 Gleichmässige Stetigkeit

Definition 1.6: (Struwe 4.7.2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *gleichmässig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0,\ \forall x, y \in \Omega : \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz 1: (Struwe 4.7.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. Dann ist f gleichmässig stetig.

Satz 2

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und Ω kompakt. Dann ist f gleichmässig stetig.

Bemerkung.
Diesen Satz kann man sich mit der folgenden Merkregel merken:

$$\text{Stetigkeit auf einer kompakten Menge} \quad \Rightarrow \quad \text{gleichmässige Stetigkeit.}$$

Beispiel 1.2. Ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ gleichmässig stetig?

Lösung:
Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$. Wir suche $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ folgendes gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1} \right| &= \left| \frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{x^2 y + x^2 - y^2 x - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + x^2 - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + (x-y)(x+y)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= |x-y| \left(\frac{xy + x + y}{(x+1)(y+1)} \right) \\
&= |x-y| \left(\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + \frac{x}{(x+1)(y+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} \right)
\end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{x+1} \leq 1$ und $\frac{y}{y+1} \leq 1$, gilt $\frac{xy}{(x+1)(y+1)} \leq 1$. Deshalb können wir die folgende Abschätzung machen:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| &= |x-y| \left(\underbrace{\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{x}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{y}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} \right) \\ &\leq |x-y|(1+1+1) \\ &= 3|x-y|\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| \leq 3|x-y| \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-y| < \frac{\varepsilon}{3} =: \delta.$$

Da δ von x, y unabhängig ist, folgt damit, dass f gleichmässig stetig ist.

1.3 Lipschitz-Stetigkeit

Definition 1.7: (Struwe 4.1.4)

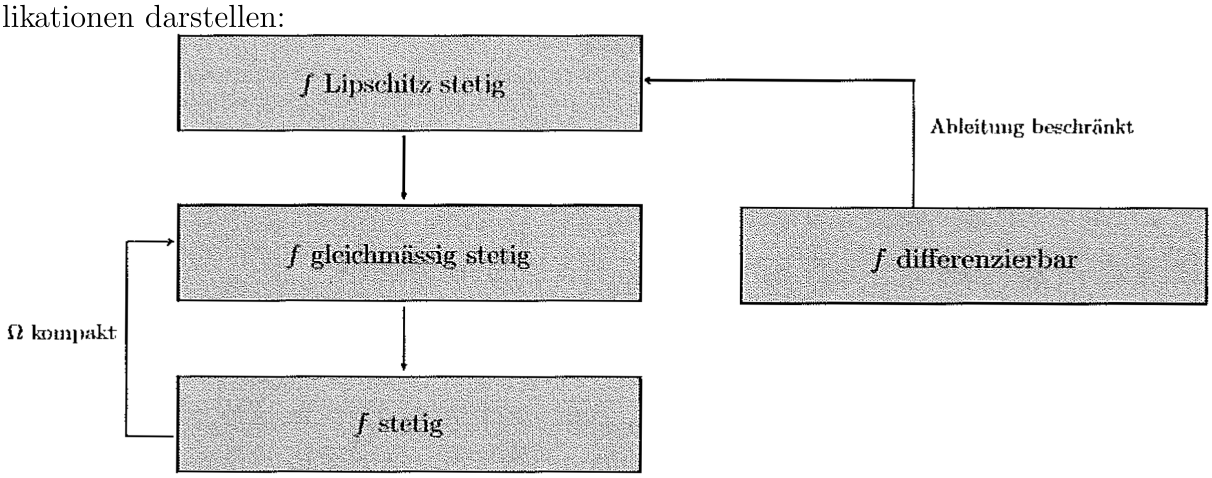
Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst *Lipschitz stetig* mit *Lipschitzkonstante* L, falls gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x-y\|\,, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Satz 3

Eine differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung auf Ω beschränkt ist.

Bemerkung.
Die verschiedenen Stetigkeiten hängen wie folgt von einander ab, wobei die Pfeile Implikationen darstellen:



Beispiel 1.3. Ist die folgende Funktion Lipschit-stetig? Falls ja, bestimme die Lipschitz-Konstante.

$$\begin{aligned} f : (-3, 2) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

Lösung:
Seien $x, y \in (-3, 2)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^2 + 4x - 1 - (y^2 + 4y - 1)| \\
&= |x^2 + 4x - 1 - y^2 - 4y + 1| \\
&= |x^2 + 4x - y^2 - 4y| \\
&= |x^2 - y^2 + 4(x - y)| \\
&= |(x - y)(x + y) + 4(x - y)| \\
&= |x + y + 4||x - y|
\end{aligned}$$

Für alle $x, y \in (-3, 2)$ gilt nach der Dreiecksungleichung $|x + y + 4| \leq |x| + |y| + 4 \leq 3 + 3 + 4 = 10$. Es ergitbt sich somit:

$$|f(x) - f(y)| = |x + y + 4||x - y| \leq 10|x - y|.$$

Die Funktion ist demzufolge Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 10$.

2 Punktweise und Gleichmässige Konvergenz

Definition 2.1: (Struwe 4.8.1)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und seien $f,\ f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$.

(i) Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen f, falls gilt

$$f_k(x) \xrightarrow{k \to \infty} f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

(ii) Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmässig* gegen f, $f_k \xrightarrow{glm.,\ k \to \infty} f$, falls

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Satz 4: (Burger 3.7.4)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in Ω) stetigen Funktionen die (in Ω) gleichmässig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Dann ist f (in Ω) stetig.

Satz 5: (Struwe 4.8.1 (erste Variante))

Seien $f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ stetig, $k \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $f_k \xrightarrow{glm.\ k \to \infty} f$ für ein $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann ist f stetig.

Satz 6: (zweite Variante)

Sei $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls f_n gegen f gleichmässig konvergiert, ist f stetig.

Bemerkung.
Meist wird die Negation vom obigen Satz benutzt:
Ist der punktweise Limes f von f_n unstetig, so konvergiert f_n nicht gleichmässig gegen f.

Satz 7: (Dini)

Sei $f_n : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ eine Folge stetiger Funktionen mit punktweisem Limes f und sei Ω kompakt. Ist f stetig und f_n monoton wachsend, so konvergiert f_n gegen f gleichmässig.

Bemerkung.
Unter einer *monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen* versteht man einen Folge $f_n(x)$, für welche $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.
In anderen Worten: Für ein beliebiges aber fixes $x \in \Omega$ gilt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Kochrezept für gleichmässige Konvergenz
Gegeben: Folge stetiger Funktionen $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Gefragt: Konvergiert f_n auf Ω gleichmässig?

(i) Berechne den punktweisen Limes von f_n auf Ω (Struwe Def. 4.8.1 (i)), d.h.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für ein fixes aber beliebiges } x \in \Omega.$$

(ii) Prüfe f_n auf gleichmässige Konvergenz.

Direkte Methode :

(A) Berechne

$$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|.$$

Zu diesem Zweck ist es oft nützlich, die Ableitung nach x von $|f_n(x) - f(x)|$ zu berechnen und diese gleich Null zu setzen. Ausser, man sieht den max direkt, aber das geht nur bei "einfachen" Aufgaben.

(B) Berechne den Limes für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|.$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$, so ist f_n auf Ω gleichmässig konvergent.

Indirekte Methoden :

- f unstetig $\Rightarrow$ keine gleichmässige Konvergenz.
- f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ gleichmässige Konvergenz.

Beispiel 2.1. Betrachte die Folge stetiger Funktionen definiert durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}}.$$

Konvergiert f_n gleichmässig auf $\mathbb{R}$?

Lösung:

(i) *Punktweise Konvergenz*: Wir fixieren $x \in \mathbb{R}$ und bilden den Limes für $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} = \sqrt{|x|} =: f(x)$$

Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise gegen den punktweisen Grenzwert $f(x) = \sqrt{|x|}$.

(ii) *Gleichmässige Konvergenz*: Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt. Wir berechnen zuerst den Ausdruck $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right) \frac{\left(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}\right)}{\left(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}\right)} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right|.
\end{aligned}$$

Da $|x|$ positiv ist, wird das Supremum von $\left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}} \right|$ bei $x = 0$ angenommen.

Es gilt somit:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right| \\
&= \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3}}} \\
&= \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1} \\
&= \frac{1}{n^{3-\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Wir bilden nun den Limes für $n \to \infty$ und finden:

$$\lim_{n\to\infty} \sup x \in \mathbb{R} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge f_n auf $\mathbb{R}$ glecihmässig gegen f.

3 Trigonometrische Funktionen

Definition 3.1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Bemerkung. (trigonometrische Identitäten)

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

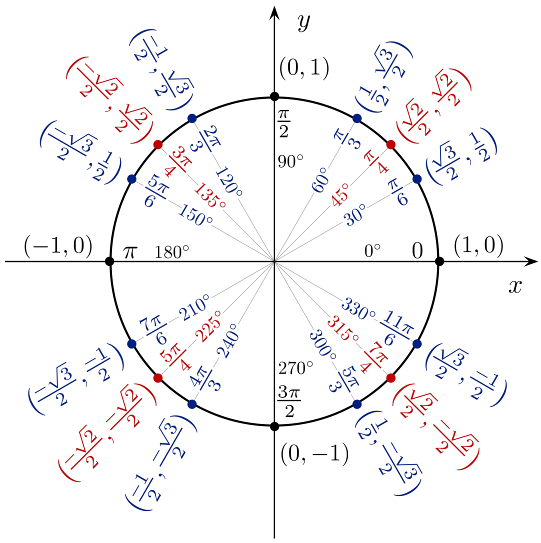
(ii) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(iii) $\sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$

(iv) $\forall x, y \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), x \pm y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Bemerkung: (sollte auf eure Zusammenfassung für die Prüfung)
Im folgenden sieht ihr "schöne" Cosinus- und Sinuswerte auf dem Einheitskreis, wobei die x-Richtung $\cos(x)$ und die y-Richtung $\sin(x)$ entspricht:



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\frac{\pi}{2}$
$90°$
π
$180°$
0
$0°$
$270°$
$\frac{3\pi}{2}$
$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$ $60°$
$\frac{\pi}{4}$ $45°$
$\frac{\pi}{6}$ $30°$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$ $120°$
$\frac{3\pi}{4}$ $135°$
$\frac{5\pi}{6}$ $150°$
$\frac{7\pi}{6}$ $210°$
$\frac{5\pi}{4}$ $225°$
$\frac{4\pi}{3}$ $240°$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{3}$ $300°$
$\frac{7\pi}{4}$ $315°$
$\frac{11\pi}{6}$ $330°$
$\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$