ANALYSIS I

9. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

April 26, 2020

1 Stetigkeit (Erinnerung)

Definition 1.1: (Struwe 4.2.2)

$K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt, d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty,\, n\in\Lambda} x_0.$$

Bemerkung.
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiel 1.1 (Struwe 4.2.2)**.**

(i) Das "abgeschlossene" Intervall $[0, 1]$ ist kompakt.

(ii) Das "offene" Intervall $(0, 1)$ ist *nicht* kompakt.

Die Beweise sind im Struwe Skript.

1.1 Stetigkeit

Definition 1.2: (Struwe 4.1.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

(i) f heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) =: a$ existiert.

(ii) f heisst *an der Stelle* $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ *stetig ergänzbar*, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =: a$ existert. (In diesem Fall ist die duch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f stegig an der Stelle x_0.)

Definition 1.3: (Struwe 4.2.1)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.
f heisst *stetig auf* Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Definition 1.4: (Burger 3.2.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in*** $\boldsymbol{x_0}$ ***stetig***, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Definition 1.5: (Burger 3.2.1 (Quantorenversion von oben))

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in*** $\boldsymbol{x_0}$ ***stetig***, falls

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$

gilt.

1.2 Gleichmässige Stetigkeit

Definition 1.6: (Struwe 4.7.2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *gleichmässig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0,\ \forall x, y \in \Omega : \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz 1: (Struwe 4.7.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. Dann ist f gleichmässig stetig.

Satz 2

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und Ω kompakt. Dann ist f gleichmässig stetig.

Bemerkung.
Diesen Satz kann man sich mit der folgenden Merkregel merken:

$$\text{Stetigkeit auf einer kompakten Menge} \quad \Rightarrow \quad \text{gleichmässige Stetigkeit.}$$

Beispiel 1.2. Ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ gleichmässig stetig?

Lösung:
Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$. Wir suche $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ folgendes gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1} \right| &= \left| \frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{x^2 y + x^2 - y^2 x - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + x^2 - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + (x-y)(x+y)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= |x-y| \left(\frac{xy + x + y}{(x+1)(y+1)} \right) \\
&= |x-y| \left(\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + \frac{x}{(x+1)(y+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} \right)
\end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{x+1} \leq 1$ und $\frac{y}{y+1} \leq 1$, gilt $\frac{xy}{(x+1)(y+1)} \leq 1$. Deshalb können wir die folgende Abschätzung machen:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| &= |x-y| \left(\underbrace{\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{x}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{y}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} \right) \\
&\leq |x-y|(1+1+1) \\
&= 3|x-y|
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| \leq 3|x-y| \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-y| < \frac{\varepsilon}{3} =: \delta.$$

Da δ von x, y unabhängig ist, folgt damit, dass f gleichmässig stetig ist.

1.3 Lipschitz-Stetigkeit

Definition 1.7: (Struwe 4.1.4)

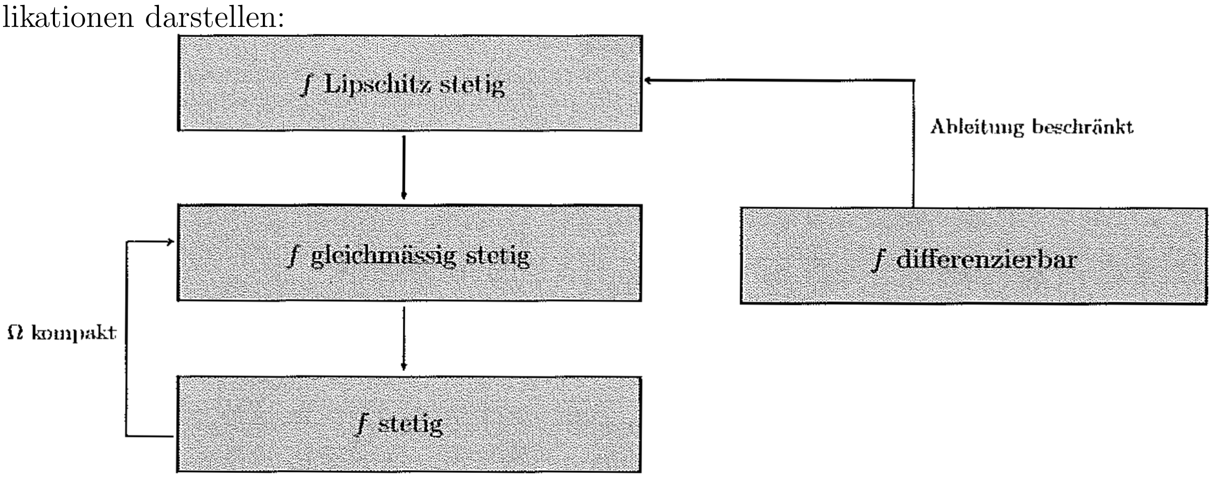
Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst *Lipschitz stetig* mit *Lipschitzkonstante* L, falls gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Satz 3

Eine differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung auf Ω beschränkt ist.

Bemerkung.
Die verschiedenen Stetigkeiten hängen wie folgt von einander ab, wobei die Pfeile Implikationen darstellen:



Beispiel 1.3. Ist die folgende Funktion Lipschit-stetig? Falls ja, bestimme die Lipschitz-Konstante.

$$\begin{aligned}
f : (-3, 2) &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = x^2 + 4x - 1.
\end{aligned}$$

Lösung:
Seien $x, y \in (-3, 2)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 + 4x - 1 - (y^2 + 4y - 1)| \\ &= |x^2 + 4x - 1 - y^2 - 4y + 1| \\ &= |x^2 + 4x - y^2 - 4y| \\ &= |x^2 - y^2 + 4(x - y)| \\ &= |(x - y)(x + y) + 4(x - y)| \\ &= |x + y + 4||x - y| \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in (-3, 2)$ gilt nach der Dreiecksungleichung $|x + y + 4| \leq |x| + |y| + 4 \leq 3 + 3 + 4 = 10$. Es ergitbt sich somit:

$$|f(x) - f(y)| = |x + y + 4||x - y| \leq 10|x - y|.$$

Die Funktion ist demzufolge Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 10$.

2 Differential und Differentiationsregeln

Sei in diesem Kapitel immer $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, sofern nicht anders definiert.

Definition 2.1: (Struwe 5.1.1)

(i) f heisst *differenzierbar* an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0,\ x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die *Ableitung* (das Differential) von f an der Stelle x_0.

(ii) Analog heisst $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ an der Stelle x_0 differenzierbar, falls jede der Komponentenfunktionen f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist und$f'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_n'(x_0))$.

Definition 2.2: (Struwe 5.1.2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *auf* Ω *differenzierbar*, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

Satz 4: (Struwe 5.1.1)

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, so ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Satz 5: (Struwe 5.1.2)

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann sind die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, nach die Funktion f/g an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

(i) Linearität:
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) Produkteregel:
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(iii) Quotientenregel:
$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Satz 6: (Kettenregel; Struwe 5.1.3)

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beispiel 2.1. Berechne die Ableitung von $|\sin(x)|^{\cos(x)}$.

Lösung:
Wir schreiben den Ausdruck um:
$$\begin{aligned} |\sin(x)|^{\cos(x)} &= e^{\log\left(|\sin(x)|^{\cos(x)}\right)} \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|} \end{aligned}$$

Verwende nun die Ketten- und Produkteregel:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|\sin(x)|^{\cos(x)} &= \frac{d}{dx}e^{\cos(x)\log|\sin(x)|} \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\frac{d}{dx}(\cos(x)\log|\sin(x)|) \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \cos(x)\cdot\frac{d}{dx}\log|\sin(x)|\right) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Ableitung vom Logarithmus ein bisschen genauer:
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, & f(x) > 0 \\ \frac{d}{dx}\log(-f(x)) = \frac{1}{-f(x)}\cdot(-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}, & f(x) < 0 \end{cases} \\ \iff \quad &\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Also ist das folgende unsere Lösung:

$$\frac{d}{dx}|\sin(x)|^{\cos(x)} = e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$
$$= |\sin(x)|^{\cos(x)}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right).$$

3 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 7: (Struwe 4.6.2)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Setze $f(a)=c,\ f(b)=d$. Dann ist $f:[a,b]\to[c,d]$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

Satz 8: (Struwe 4.6.3)

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonen Limites

$$-\infty \le c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \le \infty.$$

Dann ist $f:(a,b)\to(c,d)$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

Satz 9: (*Mittelwersatz*; Struwe 5.2.1)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b). Dann existiert $x_0\in(a,b)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a) \quad\Leftrightarrow\quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a,f(a)),(b,f(b))\in\mathcal{G}(f)$.

Beispiel 3.1. Zeige $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ für $n\in\mathbb{N}$ und $\alpha>0$.
(Hinweis: Betrachte die Funktion $\frac{1}{x^\alpha}$ auf dem Interval $(n-1,n)$)

Lösung:
Wir betrachten die Funktion $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ auf dem Interval $[n-1,n]$. Die Funktion ist auch $(n-1,n)$ stetig und auf $(n-1,n)$ differenzierbar. Die Ableitung ist $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$.

Gemäss dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in (n-1, n)$ mit

$$\begin{aligned}
f'(c) = -\frac{\alpha}{c^{\alpha+1}} &\overset{!}{=} \frac{f(n) - f(n-1)}{n-(n-1)} \\
&= \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha}}{n-n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha}}{1} \\
&= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{c^{\alpha+1}} &= \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^{\alpha+1}} &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Der Punkt c liegt im Intervall $[n-1, n]$, so dass $c < n$, d.h. $\frac{1}{n} < \frac{1}{c}$. Also gilt $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{c^{\alpha+1}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{c^{\alpha+1}} &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^{\alpha+1}} &< \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.1: (Struwe 5.2.1)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) (wie in Satz 5.2.1).

(i) Falls $f' \equiv 0$ auch (a, b), so ist f konstant.

(ii) Falls $f' \geq 0$ (bzw. > 0) auf (a, b), so ist f (streng) monoton wachsend.

Satz 10: (*Umkehrsatz*; Struwe 5.2.2)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' > 0$ auf (a, b) und seien

$$-\infty \leq c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \leq \infty.$$

Dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad \forall x \in (a, b),$$

bzw.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \forall y \in (c, d).$$

Beweis:
Gemäss Korollar 3.1 (ii) ist f streng monoton wachsend und zudem stetig nach Satz 4.

Gemäss Satz 8 ist $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

Behauptung: f^{-1} ist differenzierbar, $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$, $\forall x_0$.
Beweis:
Fixiere $y_0 = f(x_0)$. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (c,d)$ mit

$$y_k = f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty}, \quad y_k \neq y_0, \; (k \in \mathbb{N}).$$

Es folgt $x_k \neq x_0$ für alle k. Da f^{-1} stetig ist, gilt zudem

$$x_k = f^{-1}(y_k) \xrightarrow{k\to\infty} x_0 = f^{-1}(y_0),$$

also folgt

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(f(x_0)) &\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} \\ &= \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k - x_0}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Beispiel 3.2. Berechne die Ableitung von $\arcsin(x)$ für $x \in (-1,1)$ mit Hilfe vom Umkehrsatz.
Bemerkung: $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$, $\sin^2(x) := (\sin(x))^2$

Lösung:
Zuerst schreiben wir mal auf was wir über $\arcsin(x)$ und der Umkehrfunktion $\sin(x)$ wissen:

$$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(y) \quad \wedge \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

Nun berechnen wir die Ableitung von $\arcsin(x)$:

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &\overset{\text{Umkehrsatz}}{=} \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &\overset{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Somit ist $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Beispiel 3.3. Berechne die Ableitung von $\sqrt{x}$ für $x \in (0,\infty)$ mit Hilfe vom Umkehrsatz.

Lösung:
Zur Kontrolle berechnen wir direkt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Jetzt berechnen wir die Ableitung von $\sqrt{x}$ mit dem Umkehrsatz. Zuerst schreiben wir wieder auf was wir über $\sqrt{x}$ und dessen Umkehrfunktion x^2 wissen:

$$f(x) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} &\overset{\text{Umkehrsatz}}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{f'(\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Also erhalten wir das gleiche Resultat mit dem Umkehrsatz, wie wenn wir direkt die Ableitung berechnen.

4 Extrema

Sei in diesem Kapitel immer $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sofern nicht anders definiert.

Definition 4.1: (Struwe 5.4.2)

(i) f heisst *auf Ω m-mal differenzierbar*, falls f $(m-1)$-mal differenzierbar ist mit differenzierbarer $(m-1)$-ter Ableitung $f^{(m-1)}$.
In diesem Fall heisst

$$f^{(m)} = \frac{\mathrm{d}f^{(m-1)}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{dx}^m} : \Omega \to \mathbb{R}$$

die *m-te Ableitung* von f.

(ii) f ist *von der Klasse $C^m(\Omega)$*, falls f m-mal differenzierbar ist und falls die Funktionen $f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}, ..., f^{(m)}$ stetig sind.

Korollar 4.1: (Struwe 5.5.1)

Ein $x_0 \in \Omega$ heisst (strikte) *lokale Minimalstelle* von f, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U \quad (\text{bzw. } f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}).$$

Korollar 4.2: (Struwe 5.5.1)

Sei $f \in C^m(\Omega),\ x_0 \in \Omega$ mit $f'(x_0) = ... = f(^{(m-1)}(x_0) = 0$.

(i) Falls $m = 2k+1,\ x_0$ lokale Minimalstelle, so folgt $f^{(m)}(x_0) = 0$.

(ii) Falls $m = 2k$ und falls $f^{(m)}(x_0) > 0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.

Satz 11: (Struwe 5.5.4)

Jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad ≥ 1 hat (mindestens) eine Nullstelle.