ETH zürich

Analysis I

10. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

May 2, 2020

1 Differential und Differentiationsregeln (Erinnerung)

Sei in diesem Kapitel immer $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, sofern nicht anders definiert.

Definition 1.1: (Struwe 5.1.1)

(i) f heisst *differenzierbar* an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0,\ x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die *Ableitung* (das Differential) von f an der Stelle x_0.

(ii) Analog heisst $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ an der Stelle x_0 differenzierbar, falls jede der Komponentenfunktionen f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist und$f'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_n'(x_0))$.

Definition 1.2: (Struwe 5.1.2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *auf* Ω *differenzierbar*, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

Satz 1: (Struwe 5.1.1)

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, so ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Satz 2: (Struwe 5.1.2)

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, nach die Funktion f/g an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

(i) Linearität:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) Produkteregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(iii) Quotientenregel:

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Satz 3: (Kettenregel; Struwe 5.1.3)

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beispiel 1.1. Berechne die Ableitung von $|\sin(x)|^{\cos(x)}$.

Lösung:
Wir schreiben den Ausdruck um:

$$\begin{aligned} |\sin(x)|^{\cos(x)} &= e^{\log\left(|\sin(x)|^{\cos(x)}\right)} \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|} \end{aligned}$$

Verwende nun die Ketten- und Produkteregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|\sin(x)|^{\cos(x)} &= \frac{d}{dx}e^{\cos(x)\log|\sin(x)|} \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\frac{d}{dx}(\cos(x)\log|\sin(x)|) \\ &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \cos(x)\cdot\frac{d}{dx}\log|\sin(x)|\right) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Ableitung vom Logarithmus ein bisschen genauer:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, & f(x) > 0 \\ \frac{d}{dx}\log(-f(x)) = \frac{1}{-f(x)}\cdot(-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}, & f(x) < 0 \end{cases} \\ \iff \quad &\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Also ist das folgende unsere Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|\sin(x)|^{\cos(x)} &= e^{\cos(x)\log|\sin(x)|}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \\ &= |\sin(x)|^{\cos(x)}\left(-\sin(x)\log|sin(x)| + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right). \end{aligned}$$

Satz 4: (Königsberger Differenzierbarkeitssatz S.165)

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und fast überall differenzierbar. Die (fast überall in Ω existierende) Ableitung f' besitze in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ eine stetige Ergänzung (Fortsetzung). Dann ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_o) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.

Bemerkung.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Bemerkung.
Um die Monotonie zu zeigen, kann man wie folgt vorgehen: Ersetzte n durch die kontinuierliche Variable x und berechne die Ableitung nach x. Gilt $a'(x) \geq 0$ respektive $a'(x) \leq 0$, so ist die Folge monoton wachsend respektive monoton fallend.

2 Extrema

Sei in diesem Kapitel immer $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sofern nicht anders definiert.

Definition 2.1: (Struwe 5.4.2)

(i) f heisst *auf* Ω *m-mal differenzierbar*, falls f $(m-1)$-mal differenzierbar ist mit differenzierbarer $(m-1)$-ter Ableitung $f^{(m-1)}$.
In diesem Fall heisst

$$f^{(m)} = \frac{\mathrm{d} f^{(m-1)}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{dx}^m} : \Omega \to \mathbb{R}$$

die *m-te Ableitung* von f.

(ii) f ist *von der Klasse $C^m(\Omega)$*, falls f m-mal differenzierbar ist und falls die Funktionen $f = f^{(0)},\ f' = f^{(1)}, ..., f^{(m)}$ stetig sind.

Korollar 2.1: (Struwe 5.5.1)

Ein $x_0 \in \Omega$ heisst (strikte) *lokale Minimalstelle* von f, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt

$$f(x) \geq f(x_0), \ \ \forall x \in U \quad (\text{bzw. } f(x) > f(x_0), \ \ \forall x \in U \setminus \{x_0\}).$$

Korollar 2.2: (Struwe 5.5.1)

Sei $f \in C^m(\Omega),\ x_0 \in \Omega$ mit $f'(x_0) = ... = f^{(m-1)}(x_0) = 0$.

(i) Falls $m = 2k+1,\ x_0$ lokale Minimalstelle, so folgt $f^{(m)}(x_0) = 0$.

(ii) Falls $m = 2k$ und falls $f^{(m)}(x_0) > 0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.

Satz 5: (Struwe 5.5.4)

Jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad ≥ 1 hat (mindestens) eine Nullstelle.

3 Konvexe Funktionen und Jensen

Definition 3.1

Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

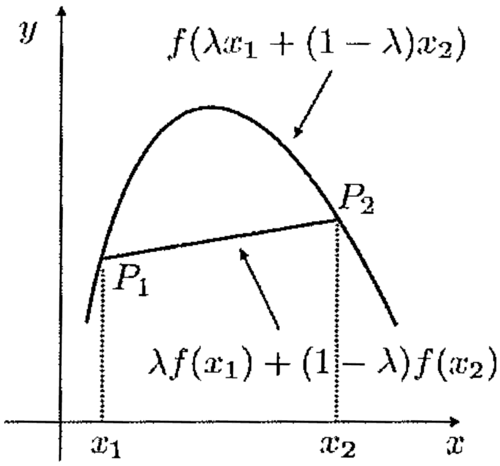
für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.
f heisst *konkav*, wenn $-f$ konvex ist, d.h. wenn

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

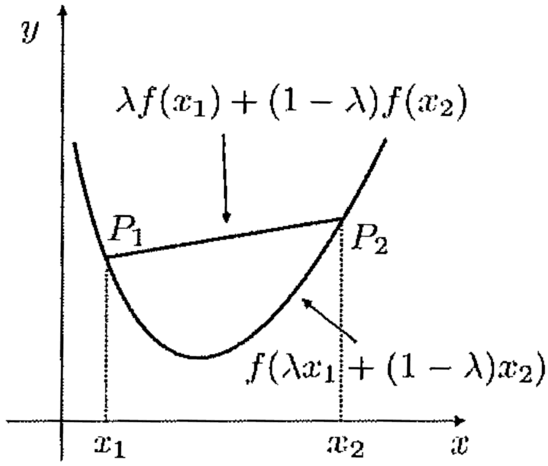
für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

Bemerkung.
Die Funktion f heisst *konvex* (konkav), falls ihr Graph auf jedem Teilinterval unterhalb der jeweiligen Sekante liegt, d.h. falls für alle Punkte $x_0 < x < x_1$ im Interval $[x_0, x_1]$ gilt

$$f(x) \leq \underbrace{f(x_0) + \frac{f(x_1)f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}_{\text{Sekannte}}.$$



konkav



konvex

Satz 6

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f genau dann konvex (konkav), wenn $f''(x) \geq 0 \ \ (\leq 0)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Satz 7: (Jensen; Struwe Satz 5.5.3)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für beliebige Punkte $x_1, ..., x_N \in (a,b)$ und Zahlen $0 \leq t_1, ..., t_N \leq 1$ mit $\sum_{i=1}^{N} t_i = 1$ die Ungleichung:

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} t_i f(x_i).$$

Beispiel 3.1 (Struwe Beispiel 5.5.4)**.** [Vergleich von arithmetischem und geometrischem Mittel]
Für alle $0 < x_1, ..., x_n < \infty, \ \ 0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_n \leq 1$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ gilt:

$$\prod_{i=0}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Beweis:
Die Aussage folgt mit Satz 5.5.3 (Jensen).
Mit $\exp'' = \exp > 0 \overset{\text{Satz 1.}}{\Longrightarrow}$ ist die Funktion exp konvex. Diese Eigenschaft werden wir im folgenden nutzen:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n} x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=0}^{n} \exp(\alpha_i \log(x_i)) \\
&= \exp\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \log(x_i)\right) \\
&\overset{\text{Satz 5.5.3 Jensen}}{\leq} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \exp(\log(x_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x
\end{aligned}$$

□

Bemerkung.
Für $\alpha_i = \frac{1}{n},\ \ 1 \leq i \leq n$ gilt mit Jensen das folgende:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$