ETH zürich

Analysis I

12. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

May 17, 2020

1 Stetigkeit (Erinnerung)

Definition 1.1: (Struwe 4.2.2)

$K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt, d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty,\, n\in\Lambda} x_0.$$

Bemerkung.
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiel 1.1 (Struwe 4.2.2)**.**

(i) Das "abgeschlossene" Intervall $[0, 1]$ ist kompakt.

(ii) Das "offene" Intervall $(0, 1)$ ist *nicht* kompakt.

Die Beweise sind im Struwe Skript.

1.1 Stetigkeit

Definition 1.2: (Struwe 4.1.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

(i) f heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) =: a$ existiert.

(ii) f heisst *an der Stelle* $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ *stetig ergänzbar*, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =: a$ existert. (In diesem Fall ist die duch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f stegig an der Stelle x_0.)

Definition 1.3: (Struwe 4.2.1)

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.
f heisst *stetig auf* Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Definition 1.4: (Burger 3.2.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in*** $\boldsymbol{x_0}$ ***stetig***, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Definition 1.5: (Burger 3.2.1 (Quantorenversion von oben))

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***in*** $\boldsymbol{x_0}$ ***stetig***, falls

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$

gilt.

1.2 Gleichmässige Stetigkeit

Definition 1.6: (Struwe 4.7.2)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *gleichmässig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0, \ \forall x, y \in \Omega : \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz 1: (Struwe 4.7.3)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. Dann ist f gleichmässig stetig.

Satz 2

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und Ω kompakt. Dann ist f gleichmässig stetig.

Bemerkung.
Diesen Satz kann man sich mit der folgenden Merkregel merken:

$$\text{Stetigkeit auf einer kompakten Menge} \quad \Rightarrow \quad \text{gleichmässige Stetigkeit.}$$

Beispiel 1.2. Ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ gleichmässig stetig?

Lösung:
Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$. Wir suche $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ folgendes gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1} \right| &= \left| \frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{x^2 y + x^2 - y^2 x - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + x^2 - y^2}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= \left| \frac{xy(x-y) + (x-y)(x+y)}{(x+1)(y+1)} \right| \\
&= |x - y| \left(\frac{xy + x + y}{(x+1)(y+1)} \right) \\
&= |x - y| \left(\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + \frac{x}{(x+1)(y+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} \right)
\end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{x+1} \leq 1$ und $\frac{y}{y+1} \leq 1$, gilt $\frac{xy}{(x+1)(y+1)} \leq 1$. Deshalb können wir die folgende Abschätzung machen:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| &= |x-y| \left(\underbrace{\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{x}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{y}{(x+1)(y+1)}}_{\leq 1} \right) \\
&\leq |x-y|(1+1+1) \\
&= 3|x-y|
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| \leq 3|x-y| \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-y| < \frac{\varepsilon}{3} =: \delta.$$

Da δ von x, y unabhängig ist, folgt damit, dass f gleichmässig stetig ist.

1.3 Lipschitz-Stetigkeit

Definition 1.7: (Struwe 4.1.4)

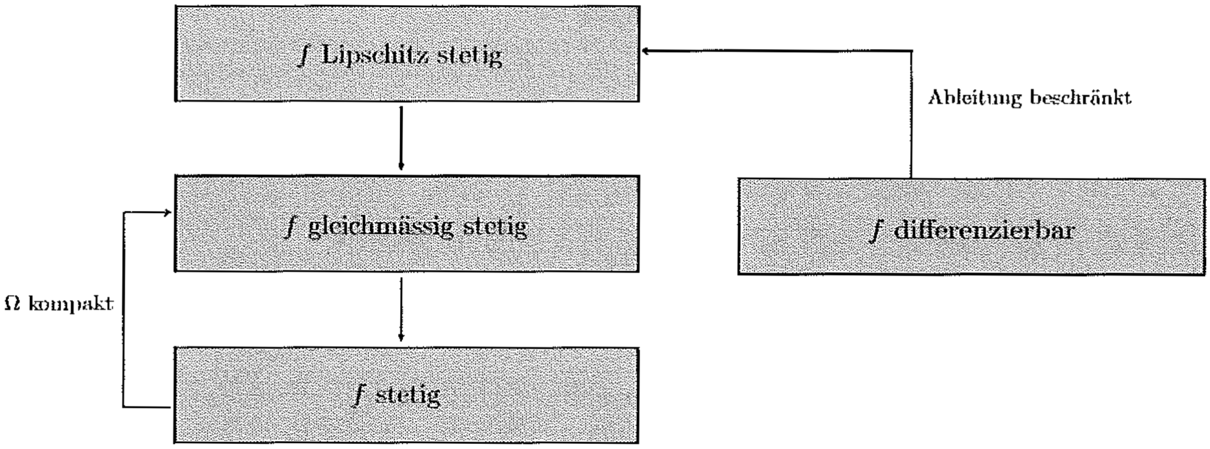
Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst *Lipschitz stetig* mit *Lipschitzkonstante* L, falls gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x-y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Satz 3

Eine differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung auf Ω beschränkt ist.

Bemerkung.
Die verschiedenen Stetigkeiten hängen wie folgt von einander ab, wobei die Pfeile Implikationen darstellen:



Beispiel 1.3. Ist die folgende Funktion Lipschit-stetig? Falls ja, bestimme die Lipschitz-Konstante.

$$\begin{aligned}
f : (-3, 2) &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = x^2 + 4x - 1.
\end{aligned}$$

Lösung:
Seien $x, y \in (-3, 2)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^2 + 4x - 1 - (y^2 + 4y - 1)| \\
&= |x^2 + 4x - 1 - y^2 - 4y + 1| \\
&= |x^2 + 4x - y^2 - 4y| \\
&= |x^2 - y^2 + 4(x - y)| \\
&= |(x - y)(x + y) + 4(x - y)| \\
&= |x + y + 4||x - y|
\end{aligned}$$

Für alle $x, y \in (-3, 2)$ gilt nach der Dreiecksungleichung $|x + y + 4| \leq |x| + |y| + 4 \leq 3 + 3 + 4 = 10$. Es ergitbt sich somit:

$$|f(x) - f(y)| = |x + y + 4||x - y| \leq 10|x - y|.$$

Die Funktion ist demzufolge Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 10$.

2 Integration (I)

Definition 2.1: (Struwe 6.1.1)

Eine Funktion $F \subset C^1([a, b])$ hiesst *Stammfunktion zu f* falls gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Definition 2.2

(i) Eine *Partition* (Zerlegung) vom kompakten Interval $I = [a, b]$ mit $a < b$ ist eine endliche Teilmenge $P \subset I$ mit $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ mit $x_0 < ... < x_n$. Die Menge aller Partitionen von I bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \ \mid \ a, b \in P,\ P \text{ ist endlich}\}.$$

(ii) Die *Feinheit* der Zerlegung ist definiert durch

$$\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - x_{i-1}|\} \qquad \text{mit } n(P) := n = |P| - 1.$$

Bemerkung: $\delta(P)$ ist die Länge des grössten Intervals $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ mit $1 \leq i \leq n$.

(iii) Seien $\xi_i \in I_i$ Zwischenpunkte (Stützstellen) mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

heisst *Riemannsche Summe* der Zerlegung P und $\xi \in \{\xi_1, ..., \xi_n\}$.

Satz 4: (Struwe 6.2.1)

$$f \text{ monoton} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist integrierbar.}$$

Satz 5: (Struwe 6.2.2)

$$f \text{ stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist integrierbar.}$$

Definition 2.3: (Obersumme)

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definition 2.4: (Untersumme)

$$\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definition 2.5: (Oberes Riemann-Integral)

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{S}(f,P) \ \mid \ P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Definition 2.6: (Unteres Riemann-Integral)

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}(f,P) \ \mid \ P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Korollar 2.1: (Struwe 6.2.3)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion. Sei $\{P^{(n)}\}$ eine Folge von Partitionen des kompakten Intervals $[a,b]$ mit $\delta(P^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\{\xi^{(n)}\}$ eine feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition $P^{(n)}$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

Bemerkung.
Falls Korollar 6.2.3 erfüllt ist, wird f als *Riemann-integrierbar* auf $[a,b]$ bezeichnet.

Bemerkung.
Uniforme Partitionen $P^{(n)} = \{a = x_0, x_1, ..., x_n\}$ mit $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ und $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ist eine Folge von Partitionen mit $\delta(P^{(n)}) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beispiel 2.1. Berechne das Integral $\int\limits_0^1 (x^3 - 2x)dx$ explizit mit Hilfe von Riemannschen Summen.

Lösung:
Wir unterteilen das Integrationsinterval $[0, 1]$ in n gleich grosse Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{1}{n}$ mit $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, ..., n$. Die Feinheit dieser Zerlegung ist $\delta(P) = \frac{1}{n}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P) = 0$. Damit ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ Riemann-integrierbar und gemäss der Definition des Riemann-Integrals (wir wählen $\xi_k = x_k$) gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^3 - 2x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 - 2\cdot\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3}{n^3} - 2\cdot\frac{k}{n}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} - \frac{n(n+1)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{n(n+1)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2} - \frac{n^2+n}{n^2} \\
&= \frac{1}{4} - 1 \\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

$(*)$: Wir haben die folgenden Formeln benuntzt:

$$
\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Bemerkung.
Die Kettenregel lautet:

$$
(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).
$$

Damit ist $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ eine Stammfunktion von $f'(g(x))g'(x)$.

Beispiel 2.2. Bestimme die Stammfunktion von $\int \frac{\arctan^5(x)}{1+x^2} dx$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan^5(x)}{1+x^2} dx &= \int \underbrace{\arctan^5(x)}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'(x)} dx \\ &= \frac{1}{6} \arctan^6(x) + C, \qquad \forall C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.3. Bestimme die Stammfunktion von $\int \frac{3^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{3^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{e^{\log(3)\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \\ &= 2 \int \frac{e^{\log(3)\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} dx \\ &= 2 \int \underbrace{e^{\log(3)\sqrt{x+1}}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}_{g(x)} dx \\ &= \frac{2}{\log(3)} \cdot e^{\log(3)\sqrt{x+1}} + C, \qquad \forall C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{\log(3)} \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + C, \qquad \forall C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Satz 6: Hauptsatz der Differential und Integralrechung (Version A)

Sei $f \in C^0([a,b])$. Setze $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b]$.
Dann gilt $F \in C^1((a,b))$ mit $F'(x) = f(x)$.

Satz 7: Hauptsatz der Differential und Integralrechung (Version B)

Sei $f \in C^0([a,b])$, F eine Stammfunktion zu f.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beispiel 2.4. Sei $A(x) := \int\limits_{-1}^{\cos(x)} e^{\arccos(t)} dt$. Berechen $A'(x)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{-1}^{x} e^{\arccos(t)} dt \\ \Phi(x) &:= \cos(x) \\ \Rightarrow \quad A(x) &= (F \circ \Phi)(x) \\ \Rightarrow \quad A'(x) &= F'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \\ &= e^{\arccos(\cos(x))} \cdot (-\sin(x)) \\ &= -\sin(x) \cdot e^x \end{aligned}$$

3 Integration (II)

Satz 8: (Monotonie des R-Integrals; Struwe 6.3.1)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, R-integrierbar mit $f \leq g$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Satz 9: (Linearität des R-Integrals; Struwe 6.3.2)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei R-integriebare Funktionen. Dann ist die Funktion $\alpha f(x) + \beta g(x)$ über $[a, b]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Korollar 3.1: (Standardabschätzung; Struwe 6.3.1)

Sei f integrierbar über $[a, b]$. Dann ist $|f|$ R-integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \right) (b - a).$$

Satz 10: (Gebietsadditivität; Struwe 6.3.3)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ über $[a, b]$ integrierbar. Sei $c \in [a, b]$. Dann sind $f\Big|_{[a,c]}$ und $f\Big|_{[c,b]}$ integrierbar und gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bemerkung.

- Konvention:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
-
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Satz 11: (Partielle Integration)

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx.$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} uv &= \int (uv)'dx \\ &\overset{\text{Produkteregel}}{=} \int (u'v+uv')dx \\ &\overset{\text{Linearität}}{=} \int u'vdx + \int uv'dx \\ \Leftrightarrow \quad \int u'vdx &= uv - \int u'vdx \end{aligned}$$

Beispiel 3.1. Berechne $\int \log^2(x)dx$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \log^2(x)dx &= \int \log^2(x)\cdot 1\ dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} \log^2(x)\cdot x - \int 2\log(x)\cdot \frac{1}{x}\cdot x\ dx \\ &= \log^2(x)\cdot x - 2\int \log(x)\ dx \\ &= \log^2(x)\cdot x - 2\left(\int \log(x)\cdot 1\ dx\right) \\ &\overset{\text{PI}}{=} \log^2(x)\cdot x - 2\left(\log(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\ dx\right) \\ &= \log^2(x)\cdot x - 2\left(\log(x)\cdot x - x\right) + C, \quad C\in\mathbb{R} \\ &= x\log^2(x) - 2x\log(x) + 2x + C, \quad C\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel 3.2. Berechne $\int e^{2x}\cos(x)\ dx$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x}\cos(x)\,dx &\overset{\text{PI}}{=} e^{2x}\sin(x) - 2\int e^{2x}\sin(x)\,dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} e^{2x}\sin(x) - 2\left(e^{2x}(-\cos(x)) - 2\int e^{2x}(-\cos(x))\,dx\right) \\
&= e^{2x}\sin(x) - 2\left(e^{2x}(-\cos(x)) + 2\int e^{2x}\cos(x)\,dx\right) \\
&= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) + 4\int e^{2x}\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \quad 5\int e^{2x}\cos(x)\,dx &= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) + \widetilde{C}, \quad \widetilde{C}\in\mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad \int e^{2x}\cos(x)\,dx &= \frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x) + C, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.3. Berechne $\int\limits_0^1 x\sinh(4x)\,dx$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sinh(4x)\,dx &= \left[x\cdot\frac{\cosh(4x)}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{\cosh(4x)}{4}\,dx \\
&= \left[x\cdot\frac{\cosh(4x)}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \cosh(4x)\,dx \\
&= \left[1\cdot\frac{\cosh(4)}{4} - 0\cdot\frac{\cosh(0)}{4}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\sinh(4x)}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{\cosh(4)}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{\sinh(4)}{4} - \frac{\sinh(0)}{4}\right] \\
&\overset{\sinh(0)=0}{=} \frac{\cosh(4)}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{\sinh(4)}{4} - 0\right] \\
&= \frac{\cosh(4)}{4} - \frac{\sinh(4)}{16}
\end{aligned}
$$

Bemerkung.
Was ist mit $\int \frac{1}{x}\,dx$?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad \int f_1(x)\,dx = \log(x) + C, \quad C\in\mathbb{R} \\
f_2 : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad \int f_2(x)\,dx = \log|x| + C, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Behauptung: $\int f_2(x)dx = \int \frac{1}{x} = \log|x| + C, \quad C\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\log|x|+C)' = \frac{1}{x}$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(\log|x| + C)' &= \log'|x|(|x|)' \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot (|x|)' \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot 1, & x > 0 \\ \frac{-1}{x} \cdot -1, & x < 0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Satz 12: (Substitution; Struwe 6.1.5)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion von f, $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ der Klasse $C^1([\alpha,\beta])$, sowie $t_0 \leq t_1$ in $[\alpha,\beta]$, so dass $g([t_0,t_1]) \subset [a,b]$. Dann gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} F'(g(t))g'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx.$$

Satz 13: (Substitution; Burger 5.4.6)

Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Beispiel 3.4. Berechne $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x})\ dx$.

Lösung:
Wir wählen die folgende Substitution:

$$u = \sqrt{x}$$

Gemäss Substitutionsregel führen wir die Variablensubstitution im Integranden durch, dazu brauchen wir noch folgendes:

$$
\begin{aligned}
g(x) := u &= \sqrt{x} \\
\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(u) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\Leftrightarrow \quad du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx \\
\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x}\ du &= dx \\
\Leftrightarrow \quad 2u\ du &= dx
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir einsetzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx &= \int_{g(0)}^{g\left(\frac{\pi^2}{4}\right)} 2u\cos(u)\, du \\
&= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}} 2u\cos(y)\, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u\cos(y)\, du
\end{aligned}$$

Nun können wir das Integral mit der partiellen Integration lösen:

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cos(u)\, du &\overset{\text{PI}}{=} 2\left(\Big[u\sin(u)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\, du\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(u))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 + \cos(u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 1\right) \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2 \\
&= \pi - 2
\end{aligned}$$

Bemerkung. (Substitution)
Folgend wird aufgelistet bei welchen Funktionen welche Substitutionen nützlich sein können:

(i) $e^x, sinh(x), cosh(x)$
Substitution: $t = e^{ax}$, $dx = \frac{dt}{at}$, $\sinh(x) = \frac{t^2-1}{2t}$, $\cosh(x) = \frac{t^2+1}{2t}$

(ii) $\log(x)$
Substitution: $t = \log(x), x = e^t$, $dx = e^t dt$

(iii) $\sqrt{ax+b}$, substituiere die Wurzel (am besten im Nenner)
Substitution: $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1} \to t = \sqrt{x}$; $\sqrt[b]{x} \to t = \sqrt[b]{x}$

(iv) $\cos^2(x)$, $\sin^2(x), ...,$ $\tan(x)$
Substitution: $t = \tan(x)$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$

(v) $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos^3(x)$, ...
Substitution: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(vi) $\sqrt{x^2+bx+c}$ im Zähler, benutze $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ oder $\cosh(x) - \sinh(x) = 1$
$\int \sqrt{1-x^2}dx$: substuiere mit $x = \sin(x)$, $\cos(x)$
$\int \sqrt{x^2-1}dx$: substuiere mit $x = \cosh(x)$
$\int \sqrt{x^2+1}dx$: substuiere mit $x = \sinh(x)$

(vii) $\sqrt{a^2+b^2x^2}$
Substitution: $x = \frac{a}{b}\cdot\tan(t)$, $dx = \frac{a}{b\cos^2(t)}\cdot dt$ oder $x = \frac{a}{b}\cdot\sinh(t)$, $dx = \frac{a}{b}\cdot\cosh(t)\cdot dt$

(viii) $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$

Substitution: $x = \frac{1}{b\cos(t)}$, $dx = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \cdot dt$ oder $x = \frac{a}{b} \cdot \cosh(t)$, $dx = \frac{a}{b} \cdot \sinh(t)dt$