ETH zürich

Analysis I

5. Übungsstunde

Steven Battilana
stevenb👊student.ethz.ch
battilana.uk/teaching

March 23, 2020

1 Reihen

Definition 1.1

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert* falls, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k =: \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert.

Bemerkung. (Rechnen mit Reihen)
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n < \infty$ dann gilt:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} < \infty$

Bemerkung. (Endliche Summen)

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

(iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Bemerkung. (Wichtige Reihen)

(i) *Geometrische Reihe*:

- $$a_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a_0 \frac{1}{1-q}, \quad \text{für } |q| < 1,$$
- $$a_0 \sum_{n=0}^{N} q^n = a_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{für } |q| < 1.$$

(ii) *Zeta-Funktion* (für $s = 1$ erhalten wir die Harmonische Reihe):
$\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{divegiert}, & \text{für } s \leq 1 \\ \text{konvergiert}, & \text{für } s > 1 \end{cases}$

(iii) *Mengoli Reihe*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

2 Konvergenzkriterien

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht.
2.

Satz 1: Majoranten/Minorantenkriterium

Sei $a_n \leq b_n$, für $a_n, b_n > 0$, falls $\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} & \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergiert;} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} & \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.} \end{cases}$

Beispiel 2.1. Zeige die Konvergenz der folgenden Reihen.

(i) Gegeben: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$.

Lösung:

$$\frac{2^n+1}{3^n+1} \leq \frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

mit der geometrischen Reihe folgt die Konvergenz.

(ii) Gegeben: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\log(n)}{(2n+1)^2}$.

Lösung:
Ab einem gewissen n_0 gilt $\log(n) < \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(x)}{(2n+1)^2} &\leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\log(n)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\log(n)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2+4n+1} \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\log(n)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\log(n)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert, da endliche Summe, der zweite Term konvergiert, da $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ Minorante von der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{3}{2} = s > 1 \quad \Rightarrow \quad$ konvergiert.

3. ***Quotientenkriterium*** (bei !, x^n, ...)
Das Quotientenkriterium zeigt *absolute* Konvergenz.

Satz 2: Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} < 1, & \text{absolute Konvergenz} \\ = 1, & \text{keine Aussage} \\ > 1, & \text{Divergenz.} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.

(i) Prüfe die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5+n}{10^n}$ auf Konvergenz.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{5+(n+1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{5+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} \cdot \frac{6+n}{5+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} \cdot \frac{n(\frac{6}{n}+1)}{n(\frac{5}{n}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} \cdot \frac{\frac{6}{n}+1}{\frac{5}{n}+1} \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{10} < 1
\end{aligned}$$

mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe absolut Konvergent ist.

(ii) Prüfe die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ auf Konvergenz.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2} \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot (n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} > 1
\end{aligned}$$

mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe divergiert.

4. ***Wurzelkriterium*** (bei $(\cdot)^n, x^n, !, ...$)
Das Wurzelkriterium zeigt *absolute* Konvergenz.

Satz 3: Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} < 1, & \text{absolute Konvergenz} \\ = 1, & \text{keine Aussage} \\ > 1, & \text{Divergenz.} \end{cases}$$

Beispiel 2.3.

(i) Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$?

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe absolut Konvergent ist.

(ii) Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$?

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^n}{2^n n!}\right)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}}_{=e} \\ &= \frac{e}{2} > 1 \end{aligned}$$

mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe divergiert.

5. *Leibnitz-Kriterium* (alternierende Reihen)

Satz 4: Leibnitz-Kriterium

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ eine alternierende Reihe und ist

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $a_n \geq 0$

(iii) a_n monoton fallend,

dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beispiel 2.4. Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n+1}$?

Lösung:
Es gilt:

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten also nur noch gerade Termen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n\cdot(-1)^n}{2n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \neq 0$$

a_n ist keine Nullfolge, somit divergiert die Reihe.

Beispiel 2.5. Prüfe die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+1}$ auf Konvergenz.

Lösung:
Wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$ schreiben wir die Reihe wie folgt um:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Prüfe die Bedingungen des Leibnitz-Kriteriums:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

(ii) $\frac{1}{n^2+1} \geq 0$

(iii) $\frac{1}{n^2+1}$ ist monoton fallend, weil $\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \leq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt.

Die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+1}$ ist somit gemäss Leibnitz-Kriterium konvergent.

6. ***Absolute Konvergenz*** (auch bei alternierenden Reihen)

Satz 5: Absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch die ungeordnete Reihe absolut.

Beispiel 2.6. Prüfe die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n!}$ auf Konvergenz.

Lösung:
Wir betrachten die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n!} \right| \overset{n! \geq 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n!}. \tag{1}$$

Nun verwenden wir das Majorantenkriterium, d.h. wir schätzen (1) mit $|\sin(n)| < 1$ nach oben ab

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Mit Hilfe des Quotientenkriterium können wir die Konvergenz von (2) zeigen.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{1} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| \\
&\overset{n \geq 1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Somit konvergiert (2) absolut. Gemäss dem Majoranten-Kriterium folgt damit auch, dass (1) absolut konvergiert, also konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n!}$.

3 Potenzreihen

Definition 3.1

Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

worin x eine reelle (oder komplexe) Variabe ist und $(a_n)_{n\mathbb{N}}$ eine reelle (oder komplexe) Folge ist.
Manchmal git man den allgemeineren Begriff einer Potzenzreihe mit einem Entwicklungspunkt x_0 an

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Definition 3.2

Der *Konvergenzradius* ist als das Supremum aller Zahlen $\rho \geq 0$ definiert, für welche die Potenzreihe für alls x mit $|x-x_0|<\rho$ konvergiert:

$$\rho := \left\{ |x-x_0| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

Satz 6: Konvergenzradius

Für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gelten die folgenden Formeln:

$$\text{(i)}\;\; \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\tfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{(bei !, } x^n\text{, ...)}$$

$$\text{(ii)}\;\; \rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(bei } (\cdot)^n, x^n, !, ...\text{).}$$

Beweis von (i):
Wir wenden das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Wir erhalten absolute Konvergenz, falls

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \\
&= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{!}{<} 1. \\
\Leftrightarrow \qquad |x| &< \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =: \rho.
\end{aligned}$$

□

Beweis von (ii):
Wir wenden das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Wir erhalten absolute Konvergenz, falls

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|x^n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \\
&= |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{!}{<} 1. \\
\Leftrightarrow \qquad |x| &< \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =: \rho.
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.
Beide Formeln folgen unmittelbar aus dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium für (i) bzw. (ii).

Bemerkung.
Aus (i) und (ii) folgt wie beim Quotienten- und Wurzelkriterium die absolute Konvergenz.

Bemerkung. (Wichtig)
Am Rand des Konvergenzkreises, d.h. für den Fall $|x - x_0| = \rho$ ist keine Aussage über die Konvergenz möglich. Deshalb muss man diesen Fall einzeln betrachten.

Beispiel 3.1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right)^n (x+1)^n$$

Lösung:

Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe von der Formel (ii):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\rho} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{>0} \left(\underbrace{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}_{\geq 0} \right)^n \right|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right)^n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n}} + |n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&\overset{n\geq 0}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{1^2} \frac{1-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} \\
&= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad \rho &= \frac{1}{\widetilde{\rho}} = 2
\end{aligned}
$$

Also konvergiert die Potenzreihe für $|x+1| < 2$ $(*)$ und divergiert für $|x+1| > 2$. Nun berechnen wir den Konvergenzbereich in Abhängigkeit von x für $(*)$:

- $$\begin{aligned} &\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad -(x+1) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x-1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad x+1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

- $$\implies \quad |x+1| < 2 \Leftrightarrow x \in (-3,1)$$

Jetzt müssen wir nur noch den Fall $|x+1| = 2$ abdecken:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n (\pm 2)^n &=^{\text{Herleitung analog wie oben ausgeführt}}_{\dots} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right)^n (\pm 2)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{(\pm 2)(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right)^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Damit haben wir eine konvergente Majorante. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$ und $x = -3$.
Zusammenfassend: Die Potenzreihe konvergiert absolut für $x \in [-3,1]$ und divergiert sonst.

Beispiel 3.2. Bestimme den Konvergenzbereich von: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x^2-1)^n$.

Lösung:
Wir betrachten zuerst $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^n$ $(*)$ mit $y := (x^2-1)$. Nun bestimmen wir den Konver-

genzradius mit Hilfe von der Formel (i):

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)+1}{1} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| \\
&\overset{n\geq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die Potenzreihe $(*)$ konvergiert somit absolut für $|y| < 1$ und divergiert für $|y| > 1$. Nun betrachten wir den Fall $y = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad (**)$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

(ii) $\frac{1}{n+1} \geq 0$

(iii)

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n - a_{n+1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \text{damit ist } a_n \text{ monoton fallend}
\end{aligned}$$

$\overset{\text{Leibnitz-Kriterium}}{\Longrightarrow}$ $(**)$ konvergiert.

Jetzt betrachten wir den Fall $y = -1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Wir haben die harmonische Reihe erhalten und wissen deshalb, dass die Reihe in diesem Fall divergiert. Damit konvergiert $(*)$ für $y \in (-1, 1]$. Jetzt zum Schluss müssen wir $y = x^2 - 1$ rücksubstituiren und bekommen:

$$\begin{aligned}-1 < y \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 - 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 \leq 2 \\ &\Longrightarrow \quad B = [-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}].\end{aligned}$$